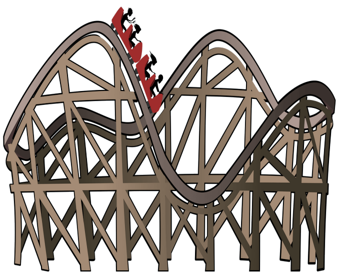


Beata Strycharz-Szemberg

Notatki do wykładu

Analiza Matematyczna 1

Katedra Matematyki Stosowanej WIiT
Politechnika Krakowska

Przewidywany plan wykładu

❶ Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

❷ Rachunek całkowy

❸ Ciągi i szeregi funkcyjne

„Notatki do wykładu” nie zawierają pełnej tematyki, która będzie poruszana na wykładzie!!!

Część I

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej rzeczywistej

W tym rozdziale będziemy rozważać funkcje określone na podzbiorach zbioru liczb rzeczywistych o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych.

W tym miejscu warto przypomnieć sobie definicję funkcji oraz takie terminy jak dziedzina i zbiór wartości funkcji, monotoniczność, parzystość czy okresowość funkcji, a przede wszystkim definicję **granicy funkcji w punkcie** oraz pojęcie **ciągłości funkcji** z wykładu *Wstęp do Analizy Matematycznej*.
Jedną z konsekwencji pojęcia granicy funkcji w punkcie jest pojęcie pochodnej funkcji i zdefiniowanie go będzie celem pierwszej części naszego wykładu. Pokażemy również, jak wiele informacji o własnościach funkcji dostarcza badanie jej pochodnej.
Dział matematyki zajmujący się pochodną nazywamy *rachunkiem różniczkowym*. Jego podstawy, jak również podstawy rachunku całkowego, stworzyli (niezależnie od siebie) Isaac Newton i Gottfried Leibniz. Więcej na ten temat można przeczytać przykładowo w książce Jasona Bardi *„The Calculus Wars: Newton, Leibniz, and the Greatest Mathematical Clash of All Time”* (zob. http://www.ams.org/notices/200905/rtx090500602p.pdf)

1 Pochodna funkcji w punkcie

Jak zwykle zaczniemy od paru definicji.

1.1 Iloraz różnicowy

Definicja 1.1. Niech $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją określoną na niepustym zbiorze $D_f \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $x_0 \in D_f$. Funkcję określoną wzorem

$$\boxed{\mathcal{I}(x) := \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad \text{gdzie} \quad x \in D_f \setminus \{x_0\}}$$

nazywamy *ilorazem różnicowym* funkcji f w punkcie x_0.
Różnicę $\Delta x := x - x_0$ nazywamy *przyrostem argumentu* funkcji, a różnicę $\Delta f := f(x) - f(x_0)$ *przyrostem* odpowiadających *wartości funkcji*.

Iloraz różnicowy opisuje *średnią zmianę* funkcji f między punktami $(x, f(x))$ i $(x_0, f(x_0))$.

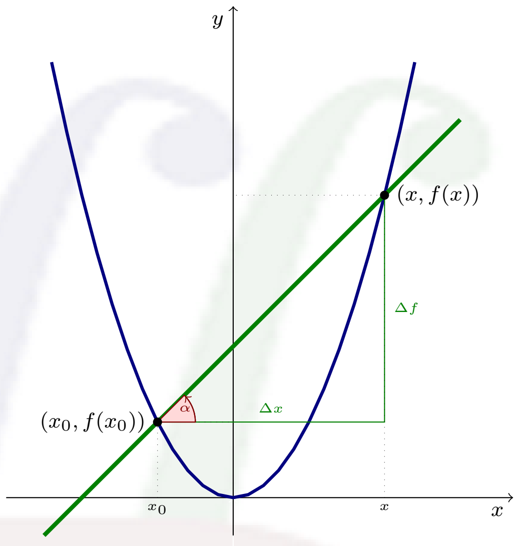
Iloraz różnicowy ma ciekawą interpretację geometryczną.

Jest to mianowicie współczynnik kierunkowy prostej wyznaczonej przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$:

$$\operatorname{tg}\alpha \;=\; \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Tą prostą nazywamy *sieczną* wykresu funkcji.

Trójkąt, który widzimy na rysunku, był bezpośrednią przyczyną oznaczania przyrostów symbolem Δ.



Czasami jest korzystniej zapisać iloraz różnicowy w innej postaci. Wprowadźmy mianowicie nowe oznaczenie na przyrost argumentu $h := x - x_0$, wtedy oczywiście $x = x_0 + h$ i *ilorazem różnicowym* funkcji f w punkcie x_0 nazwiemy funkcję

$$\boxed{\mathcal{I}(h) \;:=\; \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}, \qquad \text{gdzie} \quad h \neq 0 \quad \text{i} \quad x_0 + h \in D_f}$$

Wyróżnienie indeksem punktu x_0 nie ma wtedy większego sensu, ponieważ we wzorze nie występuje żaden inny x.

Przykłady 1.2.

a) Iloraz różnicowy funkcji $f(x) = x^2$ jest równy

$$\mathcal{I}(h) \;=\; \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \;=\; \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \;=\; \frac{(x+h+x)\cdot(x+h-x)}{h} \;=\; 2x + h.$$

b) Iloraz różnicowy funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ jest równy

$$\mathcal{I}(h) \;=\; \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \;=\; \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} \;=\; \frac{x - x - h}{x\cdot(x+h)\cdot h} \;=\; -\frac{1}{x\cdot(x+h)}.$$

c) Iloraz różnicowy funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ jest równy

$$\mathcal{I}(h) \;=\; \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \;=\; \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{x+h-x} \;=\; \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+h} - \sqrt{x}\right)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}.$$

d) Ilorazu różnicowego funkcji $f(x) = \exp(x) = e^x$

$$\mathcal{I}(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h}$$

nie można już bardziej uprościć.

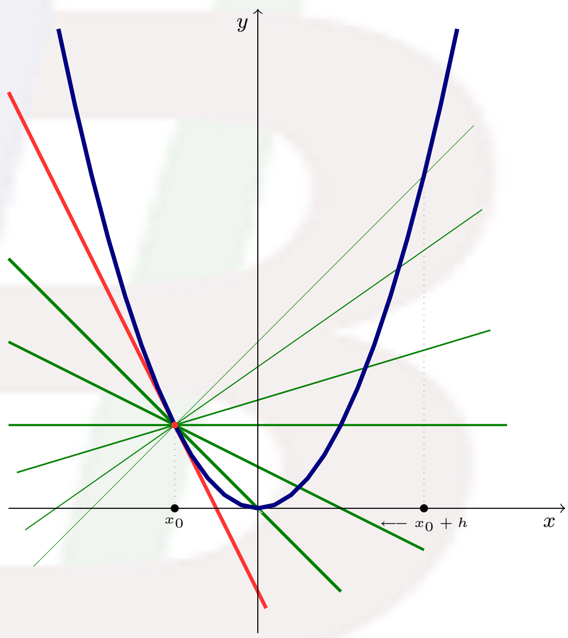
☞ **Dalsze przykłady tylko na wykładzie!**

1.2 Pochodna funkcji w punkcie

Jeśli ustalimy teraz punkt x_0 i będziemy zmieniać tylko h, ale oczywiście tak, aby punkt $x_0 + h$ pozostał w dziedzinie funkcji f, to otrzymamy wiele ilorazów różnicowych i wiele siecznych wykresu funkcji.
Zastanówmy się, co się stanie, jeśli będziemy zmniejszać długość boku $\Delta x = h$ w trójkącie przyrostów?

Obserwacja:

Im mniejszy jest przyrost argumentu h, tym mniejsza jest odległość punktu $x_0 + h$ od punktu x_0 i tym bardziej sieczna poprowadzona przez punkty $(x_0, f(x_0))$ i $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ zbliża się do pewnej prostej, którą będziemy nazywać *styczną* do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.



Definicja 1.3. Niech

$$f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$$

będzie pewną funkcją określoną na niepustym zbiorze $D_f \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech $x \in \mathrm{int} D_f$.

Funkcję f nazywamy *różniczkowalną w punkcie* x wtedy, gdy istnieje **właściwa** granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{I}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

gdzie $h \neq 0$ i $x + h \in D_f$.

Liczbę rzeczywistą będącą granicą ilorazu różnicowego nazywamy *pochodną* funkcji f w punkcie x i oznaczamy symbolem $f'(x)$, to znaczy

$$\boxed{f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.}$$

Uwaga 1.4.

- Sformułowania *funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x* i *funkcja f ma pochodną w punkcie x* są synonimami.

- Pochodna funkcji w punkcie jest liczbą rzeczywistą!
- Na oznaczenie pochodnej funkcji w punkcie x używa się również symboli
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \qquad \text{i} \qquad \dot{f}(x).$$
Pierwsze oznaczenie pochodzi od Leibniza, natomiast drugie od Newtona. My najczęściej będziemy jednak korzystali z oznaczenia przedstawionego w powyższej definicji i stosowanego przez J.L. Lagrange'a, czyli $f'(x)$.
- Jeśli D_f jest zbiorem skończonym, to pochodna funkcji nie istnieje w żadnym punkcie zbioru D_f.
- Jeśli $D_f = [a, b]$, to czasami rozważa się tzw. pochodne jednostronne.
Wtedy pochodną prawostronną funkcji f w punkcie a jest granica prawostronna ilorazu różnicowego funkcji f w punkcie a
$$f'_+(a) \;:=\; \lim_{h\to 0^+} \frac{f\,(a+h) - f\,(a)}{h},$$
o ile istnieje. Podobnie pochodną funkcji f w punkcie b jest granica lewostronna ilorazu różnicowego funkcji f w punkcie b
$$f'_-(b) \;:=\; \lim_{h\to 0^-} \frac{f\,(b+h) - f\,(b)}{h}.$$
Pochodne jednostronne można oczywiście rozważać także w punktach należących do wnętrza dziedziny. Wtedy warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia pochodnej w punkcie jest równość pochodnych jednostronnych. Ich wspólna wartość jest wtedy wartością pochodnej w danym punkcie (por. Definicja granicy i ciągłości jednostronnej funkcji w punkcie – wykład *Wstęp do Analizy Matematycznej*).

Przykłady 1.5. Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$.

a) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ będzie funkcją stałą, wtedy pochodna $f'(x) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.
Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i wszystkich $h \neq 0$ zachodzi mianowicie
$$\lim_{h\to 0} \mathcal{I}(h) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f\,(x+h) - f\,(x)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} \;=\; 0.$$

b) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$, gdzie $a \neq 0$, będzie funkcją liniową. Wtedy f jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ i pochodna $f'(x) = a$.
Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i wszystkich $h \neq 0$ zachodzi mianowicie
$$\lim_{h\to 0} \mathcal{I}(h) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f\,(x+h) - f\,(x)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} \;=\; a.$$

c) Funkcja kwadratowa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ i pochodna w tych punktach równa jest $f'(x) = 2x$.
Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i wszystkich $h \neq 0$ zachodzi mianowicie (zob. Przykład 1.2 a)
$$\lim_{h\to 0} \mathcal{I}(h) \;=\; \lim_{h\to 0} (2x + h) \;=\; 2x.$$

d) Rozważmy teraz funkcję $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$. Jest ona różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny i pochodna równa jest $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Dla $x, h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zachodzi bowiem (zob. Przykład 1.2 b)
$$\lim_{h\to 0} \mathcal{I}(h) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x\cdot(x+h)} \;=\; -\frac{1}{x^2}.$$

e) Funkcja pierwiastkowa $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in (0,\infty)$ i pochodna równa jest $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
Dla wszystkich $x \in (0,\infty)$ i wszystkich $h \neq 0$ zachodzi bowiem (zob. Przykład 1.2 c)

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{I}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Natomiast w punkcie $x = 0$ granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{h\to 0^+} \mathcal{I}(h) = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty,$$

czyli w tym punkcie funkcja pierwiastkowa nie ma nawet (właściwej) pochodnej prawostronnej.

f) Funkcja eksponencjalna $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ i pochodna równa jest $\exp'(x) = \exp(x)$.
Dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i wszystkich $h \neq 0$ zachodzi mianowicie (zob. Przykład 1.2 d)

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{I}(h) = \lim_{h\to 0} \frac{e^x\left(e^h - 1\right)}{h} = e^x.$$

Korzystamy tutaj ze znanej ze *Wstępu do Analizy Matematycznej* granicy specjalnej.

g) Funkcje trygonometryczne sinus i cosinus są różniczkowalne w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ oraz

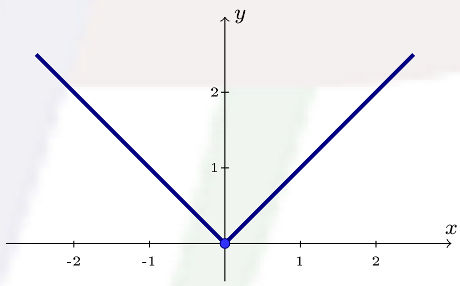
$$\sin' x = \cos x \qquad \text{oraz} \qquad \cos' x = -\sin x.$$

☞ ***Obliczenia* na wykładzie**.

h) Wartość bezwzględna $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \neq 0$ i pochodna

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad x > 0, \\ -1 & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$

☞ ***Obliczenia* – ćwiczenie domowe**.



Niech teraz $x = 0$ i $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wtedy

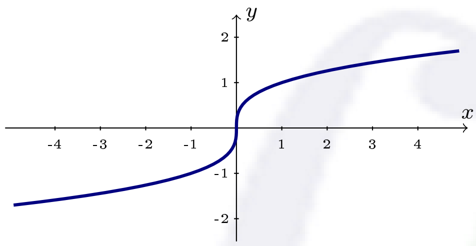
$$\mathcal{I}(h) = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad h > 0, \\ -1 & \text{dla} \quad h < 0. \end{cases}$$

Wynika stąd, że pochodne jednostronne (granice jednostronne ilorazu różnicowego) w punkcie $x = 0$ istnieją

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \mathcal{I}(h) = 1 \qquad \text{i} \qquad f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \mathcal{I}(h) = -1,$$

ale są różne.
Zatem granica ilorazu różnicowego w punkcie $x = 0$ nie istnieje i wartość bezwzględna nie jest w tym punkcie różniczkowalna.

i) Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ **nie** jest różniczkowalna tylko w punkcie $x = 0$.

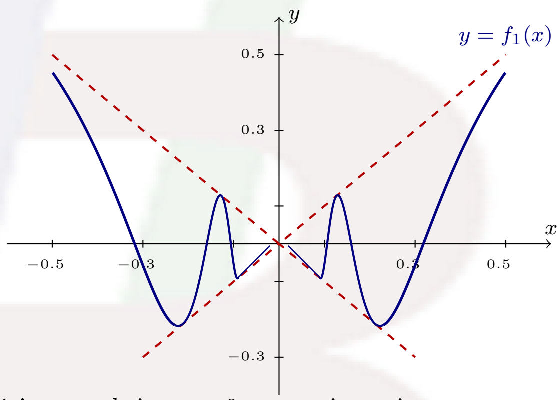


Granica jednostronna ilorazu różnicowego tej funkcji w punkcie $x = 0$ jest niewłaściwa. Czasami mówimy wtedy o *pochodnej niewłaściwej (nieskończonej)* funkcji.

☞ ***Obliczenia* na wykładzie.**

j) Funkcja $f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$f_1(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$



jest ciągła w całej swej dziedzinie, w szczególności w punkcie $x = 0$, natomiast nie ma w tym punkcie nawet pochodnych jednostronnych, także niewłaściwych.
☞ ***Obliczenia* na ćwiczeniach.**

Proszę zwrócić uwagę na wykres trzech ostatnich funkcji z poprzedniego przykładu, które nie są różniczkowalne w punkcie $x = 0$ i zastanowić się nad geometryczną interpretacją tego faktu.

Okazuje się, że można zdefiniować nawet bardziej osobliwe funkcje, które są ciągłe, natomiast nie są różniczkowalne w żadnym punkcie.

1.2.1 Interpretacja fizyczna pochodnej (Newton)

W interpretacji fizycznej pochodna $f'(t_0)$ jest prędkością zmiany pewnej wielkości fizycznej $f(t)$ w chwili t_0.

Przykładowo załóżmy, że punkt P porusza się po osi liczbowej Os. Współrzędna tego punktu s jest funkcją czasu t, tzn. w chwili t współrzędna tego punktu równa $s = s(t)$. Od chwili t_0 do chwili $t_0 + h$ punkt P przebędzie zatem drogę $\Delta s := s\,(t_0 + h) - s\,(t_0)$.

Średnią prędkość ruchu tego punktu Δv można zatem zapisać w postaci ilorazu różnicowego

$$\Delta v \;=\; \frac{\Delta s}{h} \;=\; \frac{s\,(t_0 + h) - s\,(t_0)}{h}.$$

Granicę właściwą tego ilorazu różnicowego, gdy $h \to 0$, nazywamy *prędkością punktu P w chwili t_0*, czyli

$$v\,(t_0) \;:=\; s'\,(t_0)\,.$$

Średnią zmianę predkości punktu P w czasie h też możemy zapisać w postaci ilorazu różnicowego

$$\Delta a \;=\; \frac{\Delta v}{h} \;=\; \frac{v\,(t_0+h) - v\,(t_0)}{h}.$$

Granicę właściwą tego ilorazu różnicowego, gdy $h \to 0$, nazywamy *przyspieszeniem punktu P w chwili t_0*, czyli

$$a\,(t_0) \;:=\; v'\,(t_0)\,.$$

1.2.2 Interpretacja geometryczna pochodnej (Leibniz)

Niech będzie dana funkcja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w punkcie $x_0 \in \operatorname{int} D_f$.

Przez punkt $(x_0, f\,(x_0))$ należący do wykresu funkcji f przechodzi pęk prostych o równaniach

$$L_a\colon\; x \longmapsto a\cdot(x-x_0) + f\,(x_0)\,,$$

ze współczynnikiem kierunkowym a, który, jak pamiętamy, można zapisać w postaci ilorazu różnicowego.

Styczną do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f\,(x_0))$ będziemy natomiast nazywać prostą będącą wykresem funkcji liniowej

$$\boxed{L_s\colon\; x \longmapsto f'\,(x_0)\cdot(x-x_0) + f\,(x_0)\,.}$$

Ale dlaczego właśnie tę prostą wyróżniamy i co ma ona wspólnego z funkcją f?

Okazuje się, że jest ona rozwiązaniem problemu Leibniza polegającego na wyznaczeniu spośród pęku prostych L_a tej prostej, która w otoczeniu punktu $(x_0, f\,(x_0))$ możliwie najlepiej aproksymuje (przybliża) wykres funkcji f.

Błąd tej aproksymacji dany jest różnicą

$$r(x) \;:=\; f(x) \;-\; L_a(x) \;=\; f(x) - f\,(x_0) \;-\; a\cdot(x-x_0)$$

Oczywiście $r\,(x_0) = 0$, ponieważ $f\,(x_0) = L_a\,(x_0)$ dla każdej wartości współczynnika kierunkowego a.

Chcemy teraz tak dobrać współczynnik kierunkowy a, aby błąd aproksymacji $r(x)$ zmierzał do zera przy $x \to x_0$, ale istotnie szybciej od różnicy $x - x_0$, tzn. chcemy, żeby

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} \;=\; 0.$$

Ale

$$\frac{r(x)}{x-x_0} \;=\; \frac{f(x) - f\,(x_0)}{x-x_0} \;-\; a$$

dla $x \neq x_0$, zatem współczynnik kierunkowy a musi być równy pochodnej funkcji f w punkcie x_0

$$a \;=\; \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f\,(x_0)}{x-x_0} \;=\; f'\,(x_0)\,,$$

o ile funkcja f jest w tym punkcie różniczkowalna.

W tym przypadku można zapisać funkcję f jako sumę

$$f \;=\; L_s \;+\; r$$

dwóch składników:

L_s – funkcja liniowa (styczna)
r – funkcja błędu, rzędu wyższego niż $x - x_0$.

Styczna jest więc *liniową aproksymacją* funkcji f w otoczeniu punktu $(x_0, f(x_0))$, a jej współczynnik kierunkowy opisuje *szybkość zmian* f w punkcie x_0.
W tym miejscu warto przypomnieć sobie definicję asymptot, w szczególności asymptoty ukośnej, z wykładu *Wstęp do Analizy Matematycznej*.

☞ **Tylko na wykładzie:** Interpretacja geometryczna pochodnej i pojęcie stycznej pozwala nam nam wprowadzenie definicji *kąta przecięcia wykresów* dwóch funkcji.

Problem aproksymacji funkcji będziemy jeszcze omawiać dokładniej! A teraz sformalizujmy powyższe rozważania.

1.2.3 Różniczka funkcji

Definicja 1.6. Niech

$$f\colon \begin{cases} D_f & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad f(x) \end{cases}$$

będzie funkcją różniczkowalną w punkcie $x_0 \in \operatorname{int} D_f$.

Wtedy odwzorowanie liniowe

$$\boxed{d_{x_0} f\colon \ \mathbb{R} \ni h \longmapsto f'(x_0) \cdot h \in \mathbb{R}}$$

nazywamy *różniczką* funkcji f w punkcie x_0.
Różniczkę funkcji oznaczamy również symbolem $df(x_0)$.

Wykres różniczki, jako funkcji liniowej, jest prostą przechodzącą przez punkt $(0,0)$ o współczynniku kierunkowym równym $f'(x_0)$, czyli równoległą do prostej stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Jeżeli funkcja f ma pochodną $f'(x_0)$ w punkcie x_0, to

$$\boxed{f(x_0+h) \ - \ f(x_0) \ = \ d_{x_0} f(h) + r(h),}$$

gdzie funkcja $r(h) = o(h)$, tzn. jest taką funkcją, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Jest tak dlatego, że

$$f'(x_0) \ = \ \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\cdot h}{h} = 0.$$

Podobnie można wykazać, że jeżeli dla funkcji f i $x_0 \in \operatorname{int} D_f$ istnieją liczba ℓ i funkcja r takie, że spełniony jest warunek

$$f(x_0+h) \ - \ f(x_0) \ = \ \ell \cdot h + r(h),$$

gdzie $r(h) = o(h)$, to funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i jej pochodna $f'(x_0) = \ell$.

Oznacza to, że różniczkę możemy traktować jako liniową część przyrostu funkcji i możemy ją wykorzystać do obliczeń przybliżonych lub szacowania błędów pomiarowych.

Uwaga: Pochodna $f'(x_0)$ funkcji f w punkcie x_0 jest **liczbą**, natomiast różniczka $d_{x_0} f$ jest **funkcją liniową**. Zatem z punktu widzenia matematyki są to dwa różne obiekty. Jednak czasami utożsamia się te dwa pojęcia, opierając się na wiadomościach z algebry liniowej dotyczących odwzorowań liniowych.
Do tego tematu wrócimy na *Analizie Matematycznej 2*, gdy będziemy zajmować się rachunkiem różniczkowym funkcji wielu zmiennych.

Bezpośrednio z powyższych rozważań otrzymujemy **warunek konieczny** różniczkowalności funkcji w punkcie.

Twierdzenie 1.7. Funkcja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ różniczkowalna w punkcie x_0 jest w tym punkcie ciągła.
Dowód: ☞ **na wykładzie!**

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (zob. Przykłady 1.5h),i),j))!

1.3 Reguły różniczkowania

Rozważając przykłady 1.5 można było zauważyć, że obliczanie pochodnych nawet elementarnych funkcji przy wykorzystaniu definicji 1.3 jest zadaniem pracochłonnym i mało ciekawym. Tylko w najprostszych przypadkach odpowiednie granice można policzyć w sposób elementarny. Z tego powodu w tym rozdziale przedstawimy szereg reguł różniczkowania, które efektywnie wspomogą nas w obliczaniu pochodnych bardziej skomplikowanych funkcji.

Twierdzenie 1.8. Niech $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ i $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi w punkcie $x \in D_f \cap D_g$.

a) Dla każdej liczby $\lambda \in \mathbb{R}$ funkcja $\lambda \cdot f$ jest różniczkowalna w x, przy czym

$$\boxed{(\lambda \cdot f)'(x) \;=\; \lambda \cdot f'(x).}$$

b) Suma $f+g$ jest różniczkowalna w x, przy czym

$$\boxed{(f+g)'(x) \;=\; f'(x) \;+\; g'(x).}$$

c) Iloczyn $f \cdot g$ jest różniczkowalny w x, przy czym

$$\boxed{(f \cdot g)'(x) \;=\; f'(x)\cdot g(x) \;+\; f(x)\cdot g'(x).}$$

d) Jeśli $g(x) \neq 0$, to iloraz $\frac{f}{g}$ jest różniczkowalny w x, przy czym

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \;=\; \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}.}$$

Dowód: ☞ **na wykładzie!**

Rozważmy parę prostych przykładów na wykorzystanie powyższego twierdzenia i wyznaczmy pochodne kolejnych znanych funkcji, jako uzupełnienie przykładu 1.5.

Przykłady 1.9.

a) Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ będzie funkcją potęgową o wykładniku naturalnym n. Wtedy f jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ i pochodna $f'(x) = nx^{n-1}$.
W dowodzie posłużymy się metodą indukcji matematycznej. Przypadek $n=1$ i $n=2$ pokazaliśmy w przykładzie 1.5 b), c).
Załóżmy dalej, że dla $n=k$ pochodna równa się $f'(x) = kx^{k-1}$.
Niech teraz $n = k+1$, wtedy

$$\begin{aligned} f'(x) \;&=\; \left(x^{k+1}\right)' \;=\; \left(x^k \cdot x\right)' \overset{\text{pochodna iloczynu}}{=} \left(x^k\right)' \cdot x \;+\; x^k \cdot (x)' \;= \\ &=\; kx^{k-1}\cdot x \;+\; x^k \cdot 1 \;=\; (k+1)\cdot x^k. \end{aligned}$$

Zatem wzór jest prawdziwy dla wszystkich liczb naturalnych.

b) Niech $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, gdzie $a_n \neq 0$, będzie funkcją wielomianową.
Bezpośrednio z poprzedniego przykładu oraz ze wzoru na pochodną iloczynu funkcji przez skalar i pochodną sumy funkcji wynika, że p jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ i pochodna $p'(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$.

c) Niech $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, będzie funkcją wymierną.
Wtedy ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji wynika, że f jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ i pochodna

$$f'(x) \;=\; \frac{0\cdot x^n - 1\cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2} \;=\; -\frac{n\cdot x^{n-1}}{x^{2n}} \;=\; -n\frac{1}{x^{n+1}} \;=\; -nx^{-n-1}.$$

d) Korzystając ze wzoru na pochodną ilorazu funkcji możemy policzyć także pochodną funkcji tangens (i analogicznie – funkcji cotangens)

$$(\operatorname{tg} x)' \;=\; \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \;=\; \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \;=\; \frac{1}{\cos^2 x}$$

dla $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

☞ **Dalsze przykłady i uogólnienia otrzymanych tu wzorów tylko na wykładzie!**

Kolejnym, bardzo ważnym działaniem w przestrzeni funkcji jest ich złożenie.

Twierdzenie 1.10 (Pochodna funkcji złożonej)**.**
Niech $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ i $g\colon D_g \to \mathbb{R}$ będą funkcjami rzeczywistymi i niech $x \in D_{f\circ g}$.
Jeśli funkcja g jest różniczkowalna w punkcie x a funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $g(x)$, to funkcja złożona $f\circ g$ jest różniczkowalna w punkcie x oraz

$$\boxed{(f\circ g)'(x) \;=\; f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x) \;=\; (f'\circ g)(x)\cdot g'(x).}$$

Uzasadnienie: ☞ **na wykładzie!**

W praktycznych obliczeniach musimy najpierw umieć przedstawić daną funkcję w postaci złożenia funkcji podstawowych, aby móc zastosować powyższe twierdzenie.

Przykłady 1.11.

a) Rozważmy funkcję wielomianową $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto \big(x^3 - 2x^2 + 4x - 3\big)^2$.
Zapiszmy ją w postaci złożenia $f\circ g$, gdzie $g(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 3$ i $f(y) = y^2$. Funkcje g i f, jako funkcje wielomianowe, są różniczkowalne we wszystkich punktach dziedziny i ich pochodne są równe $g'(x) = 3x^2 - 4x + 4$ i odpowiednio $f'(y) = 2y$. Z tego i z twierdzenia o pochodnej funkcji złożonej wynika, że (gdzie $y = g(x)$)

$$\begin{aligned} h'(x) \;&=\; (f\circ g)'(x) \;=\; f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x) \;=\; 2g(x)\cdot\big(3x^2 - 4x + 4\big) \;= \\ &=\; 2\left(x^3 - 2x^2 + 4x - 3\right)\cdot\left(3x^2 - 4x + 4\right) \;= \\ &=\; 6x^5 - 20x^4 + 48x^3 - 50x^2 + 56x - 24. \end{aligned}$$

b) Rozważmy teraz funkcję $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x \mapsto e^{x^2}$, którą można zapisać jako złożenie funkcji kwadratowej $g(x) = x^2$ i funkcji eksponencjalnej $f(y) = e^y$. Dostajemy stąd, że

$$h'(x) \;=\; (f\circ g)'(x) \;=\; f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x) \;=\; e^{g(x)}\cdot 2x \;=\; e^{x^2}\cdot 2x.$$

c) Korzystając z reguły różniczkowania funkcji złożonej możemy także obliczyć pochodną dowolnej funkcji wykładniczej $x \mapsto a^x$, gdzie $a > 0$:

$$(a^x)' \;=\; \left(e^{x\cdot\ln a}\right)' \;=\; e^{x\cdot\ln a}\cdot\ln a \;=\; a^x\cdot\ln a.$$

☞ **Dalsze przykłady na wykładzie!**

Twierdzenie 1.12 (Pochodna funkcji odwrotnej).
Niech $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i silnie monotoniczną oraz niech $f^{-1}\colon W_f \to \mathbb{R}$ będzie jej funkcją odwrotną.

Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie $x \in D_f$ i jej pochodna $f'(x) \neq 0$, wtedy funkcja odwrotna f^{-1} jest różniczkowalna w punkcie $y = f(x)$ oraz

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(y)}.}$$

Uzasadnienie: ☞ **na wykładzie!**

W powyższym twierdzeniu nie można opuścić założenia $f'(x) \neq 0$.
Rozważmy przykładowo funkcję potęgową $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, która jest ciągła i ściśle rosnąca, a jej funkcją odwrotną jest $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.
Wprost z definicji pochodnej funkcji w punkcie możemy sprawdzić, że f jest różniczkowalna w punkcie $x = 0$ i $f'(0) = 0$. Natomiast w przykładzie 1.5i) pokazaliśmy, że funkcja f^{-1} nie jest różniczkowalna w punkcie $y = 0 = f(x)$.

Przykłady 1.13.

a) Funkcja eksponencjalna (zob. Przykład 1.5f) jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ i jej pochodna $\exp'(x) = \exp(x)$ jest zawsze większa od zera.

   Wynika stąd, że jej funkcja odwrotna, czyli $\ln\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, jest także różniczkowalna w każdym punkcie $x > 0$ i prawdziwy jest wzór
   $$\ln'(x) = \frac{1}{(\exp \circ \ln)(x)} = \frac{1}{x}.$$
   ☞ **Na wykładzie** uzupełnimy ten punkt o pochodną dowolnej funkcji logarytmicznej!

b) Funkcja potęgowa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$, gdzie $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in \mathbb{R}$ i jej pochodna $f'(x) = nx^{n-1} \neq 0$ dla $x \neq 0$.

   Wynika stąd, że jej funkcja odwrotna $f^{-1}\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ma pochodną dla $x \in (0,\infty)$ i
   $$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(x)} = \frac{1}{f'\left(\sqrt[n]{x}\right)} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$
   Dla $n = 2$ otrzymujemy znaną nam już (zob. Przykład. 1.5e) pochodną pierwiastka kwadratowego
   $$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

c) Otrzymane w poprzednich przykładach wzory na pochodną funkcji potęgowej (zob. poprzedni podpunkt i Przykład 1.9a),c) możemy teraz uogólnić.

   Rozważmy funkcję potęgową $(0,\infty) \ni x \mapsto x^\alpha \in \mathbb{R}$ dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Korzystając z definicji funkcji potęgowej (zob. wykład ze *Wstępu do Analizy Matematycznej*) oraz ze wzoru na pochodną funkcji złożonej i podpunktu a) otrzymujemy
   $$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha \ln x}\right)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \left(\alpha \cdot \frac{1}{x}\right) = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

d) ☞ **Na wykładzie** uzupełnimy ten przykład o pochodne następujących funkcji cyklometrycznych $\arcsin\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ i $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
   $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{i} \qquad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$
   natomiast obliczenie pochodnych funkcji $\arccos$ i arcctg pozostawimy jako **zadanie domowe**.

Zapiszmy w przejrzysty sposób wszystkie obliczone przez nas pochodne.

Pochodne funkcji elementarnych:

$f(x)$		$f'(x)$	
$x \mapsto a,$	$a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	
$x^\alpha,$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	
$\frac{1}{x} = x^{-1}$		$-\frac{1}{x^2}$	
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$		$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$a^x,$	$a > 0$	$a^x \cdot \ln a$	
e^x		e^x	
$\log_a x,$	$a \in (0,1) \cup (1,\infty)$	$\frac{1}{x \ln a}$	
$\ln x$		$\frac{1}{x}$	
$\sin x$		$\cos x$	
$\cos x$		$-\sin x$	
$\operatorname{tg} x$		$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\operatorname{ctg} x$		$\frac{-1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$		$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1,1)$
$\arccos x$		$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$	$x \in (-1,1)$
$\operatorname{arc\,tg} x$		$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arc\,ctg} x$		$\frac{-1}{1+x^2}$	
$\sinh x$		$\cosh x$	
$\cosh x$		$\sinh x$	

2 Pochodna funkcji

Definicja 2.1. Funkcję

$$f\colon \begin{cases} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

nazywamy *różniczkowalną w zbiorze* $D_{f'} \subseteq D_f$ wtedy, gdy zbiór $D_{f'}$ jest otwarty i funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie tego zbioru.

W tym przypadku mówimy, że funkcja

$$f'\colon \begin{cases} D_{f'} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

jest *funkcją pochodną* funkcji f w zbiorze $D_{f'}$.

Odwzorowanie przyporządkowujące funkcji f jej pochodną f' nazywamy *operatorem różniczkowania* lub po prostu *różniczkowaniem*.

Dla funkcji pochodnej zachodzą analogiczne twierdzenia (np. warunek konieczny różniczkowalności) i reguły różniczkowania (np. działania na pochodnych), jak dla pochodnej funkcji w punkcie. Podobnie wzory zawarte w tabelce na końcu poprzedniego rozdziału, możemy teraz traktować jako wzory definiujące pochodną funkcji w zbiorze. Czyli przykładowo: każda funkcja stała w obszarze otwartym ma pochodną, która jest też funkcją stałą równą tożsamościowo zeru.

2.1 Pochodne wyższych rzędów

Jeśli funkcja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w zbiorze otwartym $D_{f'} \subseteq D_f$, to jak powiedzieliśmy odwzorowanie

$$f'\colon D_{f'} \ni x \longmapsto f'(x) \in \mathbb{R}$$

definiuje nową funkcję f', tak zwaną *pierwszą pochodną* funkcji f.

Jeśli funkcja f' jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D_{f'}$, to możemy mówić o *drugiej pochodnej (pochodnej rzędu drugiego) funkcji f w tym punkcie*, czyli

$$\boxed{f''(x_0) := (f')'(x_0).}$$

W sytuacji, gdy zbiór punktów, w których funkcja f' jest różniczkowalna jest niepusty, oznaczmy go przez $D_{f''}$, możemy zdefiniować kolejną funkcję

$$f''\colon D_{f''} \ni x \longmapsto f''(x) \in \mathbb{R},$$

czyli *drugą pochodną (pochodną rzędu drugiego) funkcji* f w zbiorze $D_{f''}$. O funkcji f mówimy wtedy, że jest *dwukrotnie różniczkowalna* w zbiorze $D_{f''}$.

Wprost z definicji drugiej pochodnej wynika, że

$$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{h}.$$

Analogicznie możemy zdefiniować trzecią pochodną (pochodną rzędu trzeciego) funkcji f i wyższe.

Definicja 2.2. Niech $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ będzie pewną funkcją rzeczywistą i niech $n > 1$.
Mówimy, że funkcja f jest *n-krotnie różniczkowalna* w punkcie $x_0 \in D_f$, jeśli

- funkcja f jest $(n-1)$-krotnie różniczkowalna w pewnym otoczeniu punktu x_0;
- funkcja $f^{(n-1)}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0.

W tym przypadku definiujemy *n-tą pochodną (pochodną rzędu n) funkcji f w tym punkcie* następująco

$$\boxed{f^{(n)}(x_0) := \left(f^{(n-1)}\right)'(x_0).}$$

Jeśli istnieje ona dla wszystkich punktów $x \in D_f$, to definiujemy *n-tą pochodną (pochodną rzędu n) funkcji f* jako odwzorowanie

$$f^{(n)}\colon \begin{cases} D_f & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & f^{(n)}(x). \end{cases}$$

Wprost z definicji n-tej pochodnej otrzymujemy

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h}.$$

Definicja 2.3. Niech $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ będzie funkcją rzeczywistą i niech $U \subseteq D_f$ będzie zbiorem otwartym.

a) Mówimy, że funkcja f jest klasy $\mathcal{C}(U)$ (lub $\mathcal{C}^0(U)$), jeśli f jest ciągła w zbiorze U.

b) Mówimy, że funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^1(U)$ (*różniczkowalna w sposób ciągły*), jeśli f jest różniczkowalna i jej pochodna f' jest ciągła w zbiorze U.

c) Mówimy, że funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^n(U)$, gdzie $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, jeśli f jest n-krotnie różniczkowalna i jej n-ta pochodna $f^{(n)}$ jest ciągła w zbiorze U.

d) Mówimy, że funkcja f jest klasy $\mathcal{C}^\infty(U)$, jeśli f jest klasy $\mathcal{C}^n(U)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zauważmy, że $\mathcal{C}^n(U) \subseteq \mathcal{C}^{n-1}(U)$, ponieważ wprost z definicji każda funkcja n-krotnie różniczkowalna ma $(n-1)$-szą pochodną, która jest różniczkowalna, zatem musi też być ciągła. Wynika stąd, że

$$\mathcal{C}^\infty(U) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(U).$$

Przykłady 2.4.

a) Funkcja stała jest funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i jej pochodne każdego rzędu są funkcjami stałymi równymi tożsamościowo zeru.

b) W przykładzie 1.5b) pokazaliśmy, że funkcja liniowa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax+b$ jest różniczkowalna i jej pochodna jest funkcją stałą, $f'(x) = a$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zatem z poprzedniego podpunktu wynika, że f jest funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i $f^{(n)} \equiv 0$ dla $n \geqslant 2$.

c) Podobnie można pokazać, że funkcja kwadratowa jest klasy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i jej wszystkie pochodne począwszy od rzędu 3 są równe tożsamościowo zeru.
Ogólnie, jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją wielomianową stopnia n, to f jest klasy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ i $f^{(n+1)} \equiv 0$.

d) W przykładzie 1.5d) pokazaliśmy także, że funkcja $f\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ jest różniczkowalna i jej pochodna $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Stosując wzór na pochodną ilorazu można wykazać, że f jest klasy $\mathcal{C}^\infty(D_f)$ i jej pochodne nie są trywialne.

e) Z przykładu 1.5f),g) wynika również, że analogiczne stwierdzenia są prawdziwe m.in. dla funkcji eksponencjalnej, sinus i cosinus. W szczególności korzystając z indukcji matematycznej można pokazać, że

$$\begin{aligned} \exp^{(n)} x &= \exp x, \\ \sin^{(n)} x &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \\ \cos^{(n)} x &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$.

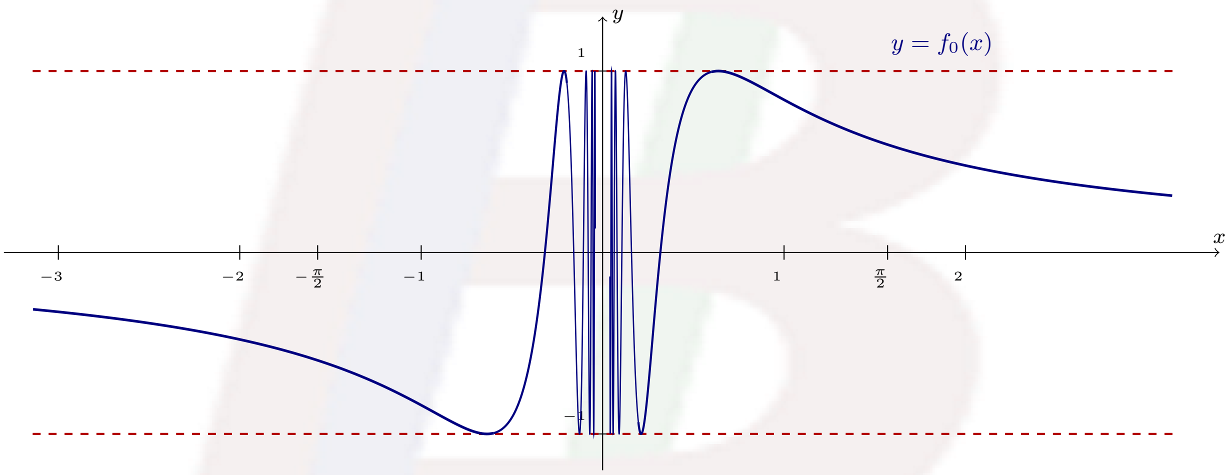
Z powyższego przykładu nie można jednak wyciągać mylnego wniosku, że wszystkie funkcje są funkcjami klasy $\mathcal{C}^\infty$. Można bowiem wskazać przykładowo funkcje, które są klasy $\mathcal{C}^n$, ale nie mają $(n+1)$-szej pochodnej w każdym punkcie lub funkcje, które są n-krotnie różniczkowalne, ale nie są klasy $\mathcal{C}^n$.

Przykład 2.5.

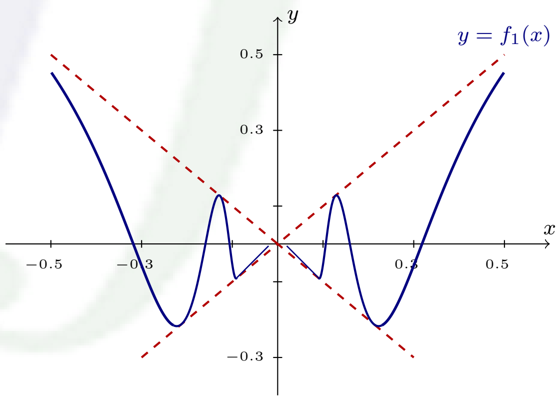
- Łatwo można pokazać, że funkcja
$$f\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto x^n|x| \in \mathbb{R}$$
jest $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$, ale nie ma $(n+1)$-szej pochodnej w punkcie $x=0$.
Uzasadnienie: ☞ **Na wykładzie!**

- Rozważmy ponadto funkcje
$$f_k(x) = \begin{cases} x^k \cdot \sin\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \end{cases}$$
dla $k \in \mathbb{N}$.

  a) Funkcja $f_0(x) = \sin\frac{1}{x}$ nie jest ciągła w punkcie $x=0$. Z twierdzenia 1.7 wynika, że f_0 nie może być różniczkowalna w $x=0$.



  b) Funkcja $f_1(x) = x \cdot \sin\frac{1}{x}$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, czyli $f_1 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Ale granica ilorazu różnicowego
$$f_1'(0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} \sin\frac{1}{h}$$
nie istnieje, zatem f_1 **nie jest** różniczkowalna w punkcie $x=0$.

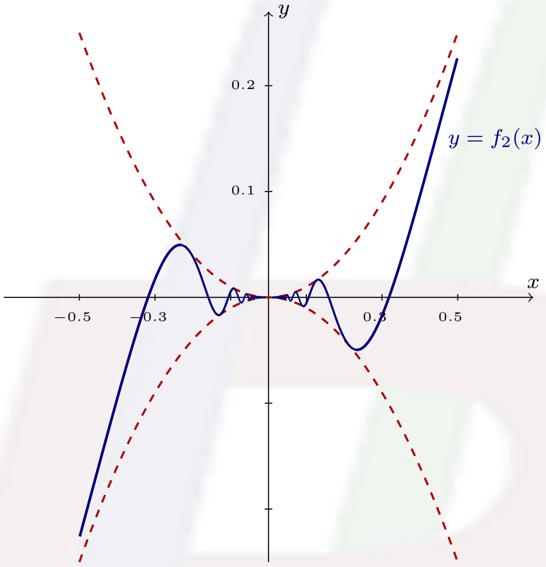


  c) Funkcja $f_2(x) = x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}$ jest ciągła w każdym punkcie swojej dziedziny, czyli $f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Granica ilorazu różnicowego
$$f_2'(0) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} \;=\; \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\frac{1}{h} \;=\; 0$$

istnieje, zatem f_2 **jest** różniczkowalna w punkcie $x = 0$. Funkcja

$$f_2'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

jest zdefiniowana wprawdzie dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, ale nie jest ciągła w punkcie $x = 0$, zatem funkcja $f_2 \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.



Uzasadnienia: ☞ **Na ćwiczeniach, zob. Lista zadań!**

Obliczając pochodne wyższych rzędów możemy korzystać z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2.6. Jeżeli funkcje f i g są n-krotnie różniczkowalne w pewnym zbiorze otwartym D, to funkcje $\lambda \cdot f$, $f + g$ i $f \cdot g$ są również n-krotnie różniczkowalne w zbiorze D i zachodzą następujące wzory

a) $\boxed{(\lambda \cdot f)^{(n)} = \lambda \cdot f^{(n)};}$

b) $\boxed{(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)};}$

c) **Wzór Leibniza**:

$$\boxed{\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)} = \\ &= f^{(n)} \cdot g + \binom{n}{1} f^{(n-1)} \cdot g' + \binom{n}{2} f^{(n-2)} \cdot g'' + \cdots + \binom{n}{n-1} f' \cdot g^{(n-1)} + f \cdot g^{(n)}; \end{aligned}}$$

gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $\lambda \in \mathbb{R}$. Przyjmujemy przy tym, że $f^{(0)} := f$ i $g^{(0)} := g$.

Dowód: ☞ **Zadanie domowe!**

Z powyższego twierdzenia wynika, że zbiory funkcji n-krotnie różniczkowalnych i zbiór funkcji klasy $\mathcal{C}^n$ (na ustalonym zbiorze D) z naturalnymi działaniami dodawania funkcji i mnożenia funkcji przez skalar są przestrzeniami wektorowymi nad ciałem $\mathbb{R}$.
Natomiast n-krotne różniczkowanie

$$\mathcal{C}^n(D) \ni f \longmapsto f^{(n)} \in \mathcal{C}(D)$$

jest odwzorowaniem liniowym.

3 Ekstrema funkcji różniczkowalnej

Na wykładzie *Wstęp do Analizy Matematycznej* zdefiniowaliśmy ekstrema globalne funkcji rzeczywistej i udowodniliśmy twierdzenie Weierstrassa o osiąganiu kresów, według którego funkcja f ciągła na przedziale domkniętym $[a, b] \subseteq D_f$ przyjmuje na tym przedziale swoje ekstrema globalne, czyli istnieją punkty $x_m, x_M \in [a, b]$ takie, że $f(x_M) = \max\{f(x)\colon x \in [a, b]\}$ oraz $f(x_m) = \min\{f(x)\colon x \in [a, b]\}$.
Twierdzenie Weierstrassa zapewnia nam jedynie istnienie przynajmniej jednej takiej pary punktów x_M i x_m, ale nie podaje sposobu, jak te punkty wyznaczyć i ani jak wykres funkcji f przebiega między nimi. W szczególności funkcja nie musi być monotoniczna. Naszym celem będzie teraz wykorzystanie rachunku różniczkowego do dokładniejszego badania funkcji jednej zmiennej rzeczywistej.

Definicja 3.1. Niech $f\colon \mathbb{R} \supseteq D_f \to \mathbb{R}$ będzie daną funkcją rzeczywistą. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D_f$

a) *maksimum lokalne* o wartości $f(x_0)$, jeśli istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że

$$f(x_0) \geqslant f(x) \qquad \text{dla wszystkich} \quad x \in D_f \cap K(x_0, \varepsilon);$$

b) *właściwe maksimum lokalne* o wartości $f(x_0)$, jeśli istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że

$$f(x_0) > f(x) \qquad \text{dla wszystkich} \quad x \in D_f \cap K(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\};$$

c) *mimimum lokalne* o wartości $f(x_0)$, jeśli istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że

$$f(x_0) \leqslant f(x) \qquad \text{dla wszystkich} \quad x \in D_f \cap K(x_0, \varepsilon);$$

d) *właściwe mimimum lokalne* o wartości $f(x_0)$, jeśli istnieje taka liczba $\varepsilon > 0$, że

$$f(x_0) < f(x) \qquad \text{dla wszystkich} \quad x \in D_f \cap K(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\};$$

gdzie $K(x_0, \varepsilon) := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ jest pewnym otoczeniem punktu x_0.

Mówimy także, że funkcja f *przyjmuje w punkcie x_0 maksimum*, odpowiednio *minimum lokalne*.
Maksimum i minimum lokalne funkcji nazywamy zbiorczo *ekstremami lokalnymi* tej funkcji.

Zauważmy, że funkcja może mieć w pewnym punkcie maksimum lokalne, ale nie musi przyjmować w tym punkcie wartości największej (maksimum globalnego). Analogiczne stwierdzenie prawdziwe jest dla minimum lokalnego i wartości najmniejszej funkcji.

Twierdzenie 3.2. **[Fermata]**
Niech funkcja $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$. Jeśli funkcja f ma w x_0 ekstremum lokalne, to

$$\boxed{f'(x_0) = 0.}$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Geometrycznie, twierdzenie Fermata oznacza, że w punktach, w których funkcja różniczkowalna przyjmuje ekstremum styczna do jej wykresu jest równoległa do osi Ox. Używając natomiast interpretacji fizycznej możemy powiedzieć, że podczas ruchu punktu po prostej prędkość tego punktu jest równa zeru w momencie rozpoczęcia powrotu.

Punkty $x_0 \in (a, b)$, dla których zachodzi warunek $f'(x_0) = 0$, nazywamy *punktami stacjonarnymi (krytycznymi)* funkcji f. Natomiast punkty stacjonarne, w których funkcja f nie ma ekstremum lokalnego, będziemy nazywać *punktami siodłowymi* funkcji f.

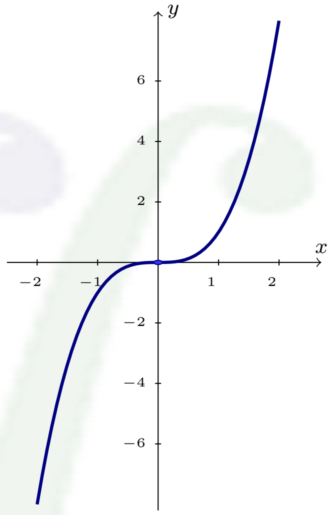
Punkty siodłowe istnieją!

Rozważmy przykładowo funkcję

$$f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right.$$

i punkt $x_0 = 0$, w którym pochodna się zeruje. Łatwo zauważyć jednak, że f nie ma ekstremum w tym punkcie.

Zatem jeśli zachodzi warunek $f'(x_0) = 0$, to nie można z tego wnioskować, że funkcja f ma w x_0 ekstremum lokalne.



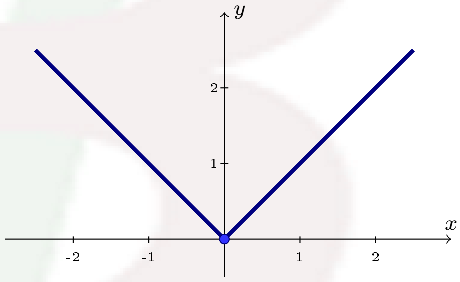
Twierdzenie Fermata jest zatem warunkiem koniecznym, ale **nie wystarczającym** istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej. Natomiast, jeżeli w punkcie $x_0 \in (a, b)$ pochodna $f'(x_0) \neq 0$, to w tym punkcie różniczkowalna funkcja f z pewnością nie przyjmuje ekstremum.

Twierdzenie 3.2 nie zachodzi na przedziałach domkniętych $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
Rozważmy przykładowo funkcję $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = x$. Funkcja ta ma minimum (wartość najmniejszą) w punkcie $x_m = 0$ i maksimum (wartość największą) w punkcie $x_M = 1$, ale pochodna $f'(x) = 1$ dla wszystkich punktów $x \in [0, 1]$.

Ponadto ekstrema lokalne mogą mieć funkcje ciągłe, ale nie różniczkowalne. Na przykład znana nam funkcja

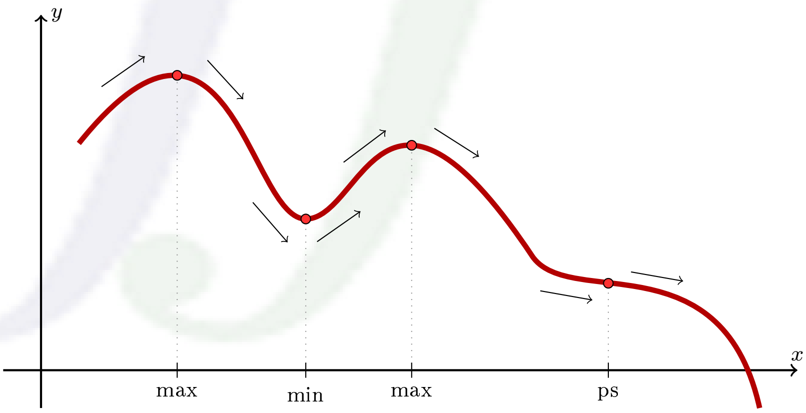
$$f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$$

ma w punkcie $x_0 = 0$ minimum (globalne) mimo, że pochodna w tym punkcie nie istnieje (por. Przykład 1.5 h)).



Uwaga Wyznaczenie ekstremów funkcji $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ oznacza zatem, że musimy zbadać

- wszystkie punkty $x_0 \in (a, b)$, dla których $f'(x_0) = 0$,
- punkty brzegowe $x_0 = a$ i $x_0 = b$,
- punkty, w których funkcja nie jest różniczkowalna.



W tym celu możemy na przykład zbadać zachowanie funkcji f (monotoniczność) w otoczeniu punktów-kandydatów $x_0 \in [a, b]$. Wrócimy do tego tematu w kolejnych rozdziałach.

Twierdzenie Fermata ma także inne zastosowania, niezwiązane z wyznaczaniem ekstremów. Wykorzystując je można przykładowo wykazać, że pochodne funkcji różniczkowalnych mają własność Darboux. Dla funkcji $f \in \mathcal{C}^1$ jest to oczywiste, ponieważ wtedy pochodna f' jest funkcją ciągłą, natomiast jeśli f' nie jest ciągła, to fakt ten wymaga dowodu.

Twierdzenie 3.3. [**Darboux**]
Niech funkcja $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna i niech $[a,b] \subseteq D_f$. Dla każdej liczby c leżącej między liczbami $f'(a)$ i $f'(b)$ istnieje taki punkt $x_0 \in [a,b]$, że

$$\boxed{f'(x_0) = c.}$$

Dowód: ☞ **Podręcznik!!**

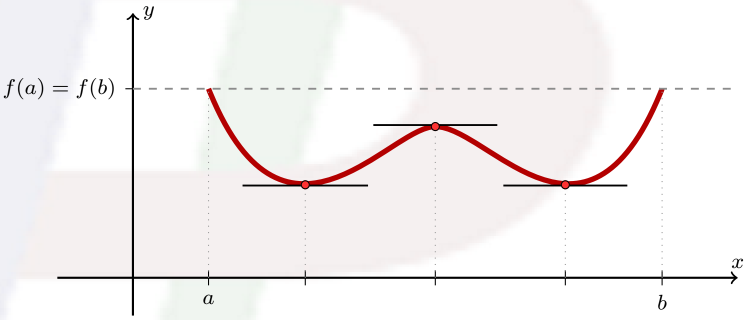
Twierdzenie Darboux może pomóc w odpowiedzi (negatywnej) na pytanie, czy dana funkcja jest funkcją pochodną.
Nad tym problemem będziemy zastanawiać się w dziale dotyczącym rachunku całkowego funkcji jednej zmiennej.

4 Twierdzenia o wartości średniej

Mamy trzy wersje twierdzenia o wartości średniej. Najłatwiejsza wersja jest wnioskiem z twierdzenia Fermata 3.2, czyli z warunku koniecznego istnienia ekstremum lokalnego funkcji różniczkowalnej.

Twierdzenie 4.1. [**Rolle'a**]
Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalną w przedziale otwartym (a,b). Jeśli $f(a) = f(b)$, to istnieje co najmniej jeden punkt $x_0 \in (a,b)$ taki, że

$$\boxed{f'(x_0) = 0.}$$



Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Interpretacja geometryczna twierdzenia Rolle'a jest oczywista. Jeśli funkcja f spełnia założenia twierdzenia Rolle'a, to styczna do wykresu funkcji f w pewnym punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do osi Ox.
Pilny Student powinien zastanowić się nad interpretacją fizyczną tego twierdzenia!

Uwaga Zauważmy, że odcinki (a,b) i $[a,b]$ mają następujące *przedstawienie parametryczne*

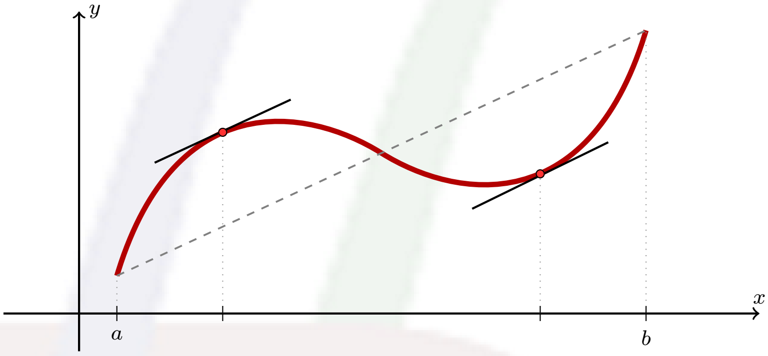
$$(a,b) = \big\{a + t(b-a)\colon\ t \in (0,1)\big\} \qquad \text{i} \qquad [a,b] = \big\{a + t(b-a)\colon\ t \in [0,1]\big\}.$$

Wynika stąd, że tezę twierdzenia Rolle'a można zapisać w (czasami) wygodniejszej postaci:
Istnieje liczba co najmniej jedna liczba $\theta \in (0,1)$ *taka, że* $f'\big(a + \theta \cdot (b-a)\big) = 0$.

Korzystając z twierdzenia Rolle'a można udowodnić kolejne twierdzenie o wartości średniej.

Twierdzenie 4.2. [**Lagrange'a**]
Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalna w przedziale otwartym (a,b), to istnieje co najmniej jeden punkt $x_0 \in (a,b)$ taki, że

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.}$$



Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 4.3. Jeżeli $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna, to istnieje liczba $\theta \in (0,1)$ taka, że

$$\boxed{f(x+h) \;=\; f(x) \;+\; f'(x+\theta h)\cdot h,}$$

o ile $x,\ x+h \in (a,b)$.

Twierdzenie Rolle'a jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Lagrange'a dla $f(a) = f(b)$.

Jeśli funkcja f spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a, to styczna do wykresu funkcji f w pewnym punkcie $(x_0, f(x_0))$ jest równoległa do siecznej przechodzącej przez punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Natomiast w interpretacji fizycznej oznacza to, średnia prędkość punktu materialnego w przedziale czasowym $[a,b]$ jest równa prędkości chwilowej w pewnej chwili $x_0 \in (a,b)$.

Twierdzenie Lagrange'a można jeszcze uogólnić.

Twierdzenie 4.4. [**Cauchy'ego o wartości średniej**]
Niech $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalnymi w przedziale otwartym (a,b). Wówczas istnieje punkt $x_0 \in (a,b)$ taki, że

$$\boxed{\big(f(b)-f(a)\big)\cdot g'(x_0) \;=\; \big(g(b)-g(a)\big)\cdot f'(x_0)\,.}$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Zauważmy, że twierdzenie Lagrange'a jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Cauchy'ego dla funkcji $g(x) = x$.

Jeżeli w twierdzeniu Cauchy'ego założymy, że $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to $g(a) \neq g(b)$ i warunek z twierdzenia możemy zapisać w postaci

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \;=\; \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Gdyby pochodna g' zerowała się choć w jednym punkcie, to powyższy warunek nie musi być prawdziwy!

5 Pochodne a monotoniczność funkcji

Twierdzenia o wartości średniej wydają się być bardzo teoretyczne, nie wskazują na przykład metody jak wyznaczyć punkty, których istnienie zapewniają. Ale ich zastosowania są bardzo ważne.

Twierdzenie Lagrange'a 4.2 można wykorzystać przykładowo do szacowania błędu.

Wniosek 5.1. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalną w przedziale otwartym (a,b). Wtedy następujące warunki równoważne:

- Pochodna f' jest ograniczona na przedziale (a,b), tzn. istnieje stała $L \geqslant 0$ taka, że
$$|f'(x)| \leqslant L \qquad \text{dla wszystkich} \quad x \in (a,b).$$
- Funkcja f spełnia na przedziale $[a,b]$ warunek Lipschitza ze stałą L.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Uwaga

- Często mówimy, że szybkość zmian wartości funkcji lipschitzowskiej jest ograniczona.
- Funkcja o ograniczonej pochodnej jest funkcją lipschitzowską, a zatem szczególności jest funkcją jednostajnie ciągłą (zob. wykład *Wstęp do Analizy Matematycznej*).
  Natomiast funkcja różniczkowalna i (tylko) jednostajnie ciągła może mieć nieograniczoną pochodną. Rozważmy przykładowo funkcję $f(x) = \sqrt{x}$ na zbiorze $[0,1]$. Jej pochodna $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ nie jest ograniczona w żadnym otoczeniu zera i $f'_+(0)$ istnieje tylko w sensie niewłaściwym. Wynika stąd, że funkcja f nie spelnia warunku Lipschtza na $[0,1]$.
- Funkcja klasy $\mathcal{C}^1$ zacieśniona do przedziału domkniętego spełnia na nim warunek Lipschitza. Z twierdzenia Weierstrassa o ograniczoności funkcji ciągłej wynika bowiem, że jej pochodna jest ograniczona i możemy skorzystać z poprzedniego twierdzenia.

Kolejny wniosek z twierdzenia Lagrange'a odgrywa dużą rolę w wyznaczaniu ekstremów funkcji.

Wniosek 5.2. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalną w przedziale otwartym (a,b).

a) Jeśli $f'(x) = 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to funkcja f jest ***stała*** w przedziale $[a,b]$.

b) Jeśli $f'(x) \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to funkcja f jest ***rosnąca*** w przedziale $[a,b]$.

c) Jeśli $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to funkcja f jest ***silnie rosnąca*** w przedziale $[a,b]$.

d) Jeśli $f'(x) \leqslant 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to funkcja f jest ***malejąca*** w przedziale $[a,b]$.

e) Jeśli $f'(x) < 0$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to funkcja f jest ***silnie malejąca*** w przedziale $[a,b]$.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Zauważmy, że warunki w podpunktach a), b) i d) są prawdziwe także jako równoważność. Natomiast warunków w podpunktach c) i e) nie można odwrócić, jako kontrprzykład może posłużyć funkcja $f(x) = x^3$.

Następne twierdzenie podaje warunki wystarczające istnienia ekstremum lokalnego funkcji.

Twierdzenie 5.3. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w punkcie $x_0 \in (a,b)$ i różniczkowalną w jego sąsiedztwie.

a) Jeśli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że

- $f'(x) < 0$ dla wszystkich $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ i $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, wtedy funkcja f ma w punkcie x_0 (właściwe) ***minimum lokalne***.
- $f'(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ i $f'(x) < 0$ dla wszystkich $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, wtedy funkcja f ma w punkcie x_0 (właściwe) ***maksimum lokalne***.

b) Niech dodatkowo funkcja f będzie dwukrotnie różniczkowalna w x_0 i niech $f'(x_0) = 0$.

- Jeśli $f''(x_0) > 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 ***minimum lokalne***.
- Jeśli $f''(x_0) < 0$, to funkcja f ma w punkcie x_0 ***maksimum lokalne***.
- Jeśli $f''(x_0) = 0$, to nie można stwierdzić, czy funkcja f ma w punkcie x_0 ekstremum.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Warunki wystarczające na istnienie ekstremum podane w powyższym twierdzeniu nie są warunkami koniecznymi! Funkcja może mieć ekstremum lokalne w punkcie x_0, a jednocześnie może zachodzić warunek $f''(x_0) = 0$. Proszę rozważyć przykładowo funkcję $f(x) = x^4$.
Ponadto można wskazać funkcję, która ma ekstremum w pewnym punkcie, ale jej pochodna nie ma stałego znaku w żadnym prawym i lewym sąsiedztwie tego punktu! ☞ **Na wykładzie!**

Jeżeli te warunki nie pozwalają na stwierdzenie, czy w danym punkcie funkcja osiąga ekstremum lokalne i jakiego rodzaju, to możemy posłużyć się testem związanym z pochodnymi wyższych rzędów. Podamy go bez dowodu (można go znaleźć w większości podręczników z analizy matematycznej). Wspomnimy tylko, że w dowodzie korzysta się ze wzoru Taylora, którym będziemy zajmować się w ostatnim rozdziale tej części wykładu.

Twierdzenie 5.4. Niech funkcja $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ ma n-tą pochodną w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in (a,b)$, gdzie $n \geqslant 2$, i pochodna ta jest ciągła w tym punkcie.
Ponadto niech $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ i $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Wówczas

a) jeśli n jest liczbą parzystą, to w punkcie x_0 funkcja f osiąga ekstremum:
   - dla $f^{(n)}(x_0) > 0$ jest to ***minimum lokalne***.
   - dla $f^{(n)}(x_0) < 0$ jest to ***maksimum lokalne***.

b) jeśli n jest liczbą nieparzystą, to w punkcie x_0 funkcja f nie osiąga ekstremum.

Na koniec tego rozdziału podamy jeszcze dwa proste wnioski z omawianych twierdzeń. Pierwszy z nich wykorzystuje się przy dowodzeniu tożsamości funkcyjnych. Drugi natomiast stanowi podstawę alternatywnej definicji funkcji eksponencjalnej.

Wniosek 5.5. Niech $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalnymi w przedziale otwartym (a,b).
Jeśli $f'(x) = g'(x)$ dla wszystkich $x \in (a,b)$, to istnieje taka stała $C \in \mathbb{R}$, że $f(x) = g(x) + C$ dla wszystkich $x \in [a,b]$.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Wniosek 5.6. [**Jednoznaczność funkcji eksponencjalnej**]
Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą w przedziale $[a,b]$ i różniczkowalną w przedziale otwartym (a,b).
Jeśli $f' \equiv f$, to

$$f(x) = C \cdot \exp(x) \qquad \text{dla} \quad x \in (a,b),$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$ jest pewną stałą.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

6 Pochodne a granice funkcji

Na wykładzie *Wstęp do Analizy Matematycznej* udowodniliśmy twierdzenie, które nazwaliśmy twierdzeniem o arytmetyce granic. Wynika z niego, że przy obliczaniu granic funkcji pomocny jest między innymi następujący wzór o granicy ilorazu

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Nie można jednak z niego skorzystać, gdy obie funkcje f i g dla $x \to x_0$ zmierzają równocześnie do 0 lub odpowiednio do $\pm\infty$. W tym przypadku otrzymujemy formalnie tzw. wyrażenie nieoznaczone typu $\left[\frac{0}{0}\right]$ lub odpowiednio $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Analogicznie, nie można korzystać ze wzoru na granicę iloczynu

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) \;=\; \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x),$$

gdy jedna funkcja zmierza do 0 a druga do $\pm\infty$. Także takie granice jak $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)}$, gdy np. dla $x \to x_0$ obie funkcje f i g zmierzają do 0 lub gdy f zmierza do 1 a g do $\pm\infty$, są wyrażeniami nieoznaczonymi. Jak wiemy, mamy następujące wyrażenia **nieoznaczone**

$$\boxed{\left[\frac{0}{0}\right], \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right], \qquad [0 \cdot \infty], \qquad [\infty - \infty], \qquad [0^0], \qquad [1^\infty], \qquad [\infty^0].}$$

Konsekwencją twierdzenia Cauchy'ego o wartości średniej z poprzedniego rozdziału jest narzędzie, które znacząco ułatwia obliczanie granic w dwóch pierwszych przypadkach. Natomiast kolejne przypadki da się do nich sprowadzić.
Należy jednak pamiętać, że nie zawsze można stosować poniżej sformułowaną regułę lub zastosowanie jej prowadzi do bardzo skomplikowanych obliczeń. Z tego powodu lepiej znać zarówno regułę de L'Hospitala, jak i granice specjalne.

Twierdzenie 6.1. **[Reguła de L'Hospitala]**
Niech funkcje $f, g\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ będą różniczkowalne w sąsiedztwie $(a, b) \setminus \{x_0\}$ punktu $x_0 \in (a, b)$ oraz dodatkowo niech pochodna $g'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$.

Ponadto niech zachodzi jeden z dwóch przypadków:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

lub

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty.$$

Jeśli istnieje (skończona lub nieskończona) granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, to istnieje też granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, i zachodzi

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Uzasadnienie: ☞ **Na wykładzie!**

W twierdzeniu 6.1 dopuszczamy także $x_0 = a$ lub $x_0 = b$, tylko rozważamy wtedy odpowiednie granice jednostronne. Ponadto reguła de L'Hospitala pozostaje prawdziwa dla granic liczonych przy $x \to -\infty$ lub odpowiednio $x \to +\infty$, jeśli tylko przedział (a, b) jest nieograniczony z dołu lub odpowiednio z góry.

Założenie o istnieniu granicy ilorazu $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ jest **istotne** i nie można go pominąć. Jako przykład proszę rozważyć granice

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + \sin x}{2x - \sin x} \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x}.$$

Omówimy teraz kilka przykładów zastosowania reguły de L'Hospitala.

Przykłady 6.2. Rozważmy najpierw parę łatwych i znanych nam granic.

a) Obliczmy granicę

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

W tym celu rozważmy funkcje $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \cos x$ i $g(x) = x - \frac{\pi}{2}$. Obie funkcje f i g są ciągłe, zatem

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \;=\; \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) \;=\; g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Funkcje f i g są także różniczkowalne, przy czym $f'(x) = -\sin x$ i $g'(x) = 1 \neq 0$.

Wynika stąd, że możemy zastosować regułę de L'Hospital i ponieważ granica $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{1}$ istnieje, to

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{1} = -1.$$

b) Obliczmy teraz granicę

$$\lim_{x\to 2} \frac{2^x - x^2}{x-2}.$$

W tym celu rozważmy funkcje $f(x) = 2^x - x^2$ i $g(x) = x - 2$. Wtedy zachodzi

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(2) = 2^2 - 2^2 = 0 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 2} g(x) = g(2) = 0.$$

Funkcje f i g są różniczkowalne, przy czym $f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x - 2x$ i $g'(x) = 1 \neq 0$.

Wynika stąd, że

$$\lim_{x\to 2} \frac{2^x - x^2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\ln 2 \cdot 2^x - 2x}{1} = 4\ln 2 - 4.$$

c) Często musimy najpierw zapisać funkcję, której granicę liczymy jako iloraz, aby móc zastosować regułę de L'Hospitala.

Obliczmy granicę

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-n}}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Różniczkując teraz osobno licznik i mianownik otrzymujemy

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-n}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{n}x^n = 0.$$

d) Może się także zdarzyć, że regułę de L'Hospitala musimy zastosować parę razy pod rząd (o ile tylko spełnione są wymagane założenia):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{\exp(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\exp(x)} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{\exp(x)} = 0.$$

e) Trudniejsza do policzenia jest granica

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \stackrel{[1^\infty]}{=} \lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right).$$

Zastosujmy regułę de L'Hospitala do argumentu funkcji eksponencjalnej

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x} \stackrel{[\frac{0}{0}]}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln\sin x - \ln x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot\cos x - \sin x}{x\cdot\sin x} \stackrel{H}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\cdot\sin x - \cos x}{\sin x + x\cdot\cos x} \stackrel{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - x\cdot\cos x}{\cos x + \cos x - x\cdot\sin x} = 0$$

i ponieważ funkcja eksponencjalna jest ciągła, zatem

$$\lim_{x\to 0} \exp\left(\frac{1}{x} \cdot \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right) = \exp(0) = 1.$$

☞ **Kolejne przykłady**, w szczególności przykłady granic, przy których nie można lub nie powinno się stosować reguły de L'Hospitala, zostaną podane na wykładzie.

7 Pochodne a krzywizna wykresu funkcji

W rozdziale 5 (str. 22) stwierdziliśmy, że znak pierwszej pochodnej f' funkcji $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ dostarcza informacji o monotoniczności tej funkcji, tzn. pozwala wyznaczyć przedziały, w których funkcja jest rosnąca (wykres wznosi się) lub malejąca (wykres opada).

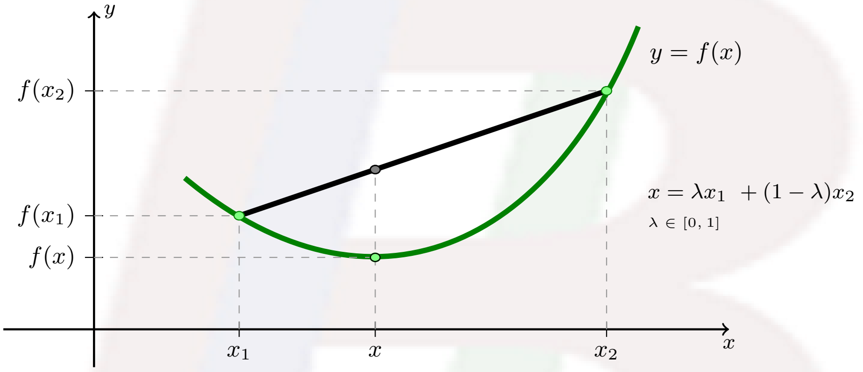
W tym rozdziale będziemy rozważać geometryczne znaczenie drugiej pochodnej f''.

Definicja 7.1. Niech będzie dana ciągła funkcja rzeczywista $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ i przedział $[a, b] \subseteq D_f$.

a) Funkcję f nazywamy *wypukłą (wypukłą ku dołowi)* na przedziale $[a, b]$, jeśli dla wszystkich $x_1, x_2 \in [a, b]$ i dla wszystkich liczb $\lambda \in [0, 1]$ spełniona jest tzw. **nierówność Jensena**:

$$\boxed{f\Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\Big) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),}$$

tzn. odcinek łączący punkty $\big(x_1, f(x_1)\big)$ i $\big(x_2, f(x_2)\big)$ leży powyżej wykresu (lub na wykresie) funkcji f.

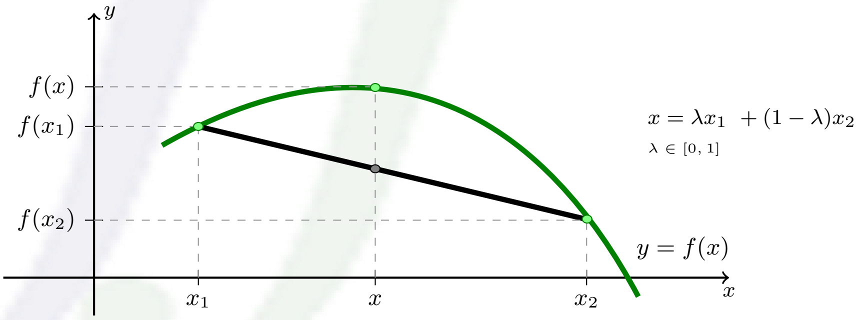


Jeżeli dla wszystkich $x_1 \neq x_2$ i dla wszystkich $\lambda \in (0, 1)$ nierówność w powyższym warunku jest ostra, to funkcję f nazywamy *ściśle wypukłą*.

b) Funkcję f nazywamy *wklęsłą (wypukłą ku górze)* na przedziale $[a, b]$, jeśli dla wszystkich $x_1, x_2 \in [a, b]$ i dla wszystkich liczb $\lambda \in [0, 1]$ spełniony jest warunek

$$\boxed{f\Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\Big) \geqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),}$$

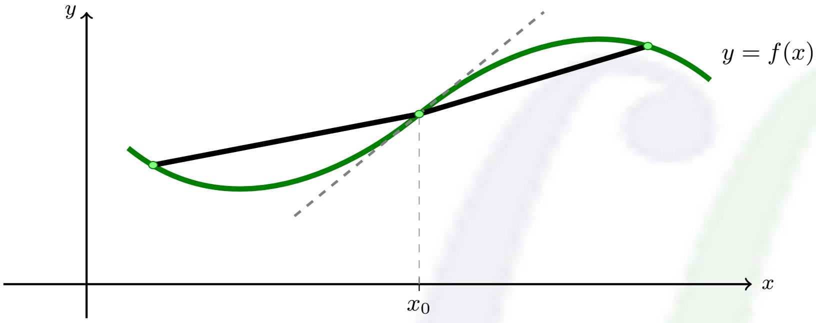
tzn. odcinek łączący punkty $\big(x_1, f(x_1)\big)$ i $\big(x_2, f(x_2)\big)$ leży poniżej wykresu (lub na wykresie) funkcji f.



Jeżeli dla wszystkich $x_1 \neq x_2$ i dla wszystkich $\lambda \in (0, 1)$ nierówność w powyższym warunku jest ostra, to funkcję f nazywamy *ściśle wklęsłą*.

c) Punkt $x_0 \in (a, b)$ nazywamy *punktem przegięcia* funkcji f, jeśli istnieje takie $\varepsilon > 0$, że spełniony jest jeden z poniższych warunków:

- f jest ściśle wypukła na przedziale $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ i ściśle wklęsła na przedziale $[x_0, x_0 + \varepsilon)$;
- f jest ściśle wklęsła na przedziale $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ i ściśle wypukła na przedziale $[x_0, x_0 + \varepsilon)$;



Uwaga

- Funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest wypukła dokładnie wtedy, gdy funkcja $-f$ jest wklęsła. Stwierdzenie to jest bezpośrednim wnioskiem z definicji 7.1 przez pomnożenie danych nierówności przez -1.
- Suma funkcji wypukłych (wklęsłych) jest też wypukła (wklęsła), ponieważ nierówności można dodawać stronami. Jeżeli przynajmniej jedna z funkcji, które sumujemy, jest ściśle wypukła (ściśle wklęsła), to suma też jest ściśle wypukła (ściśle wklęsła).
- Czasami definicję funkcji wypukłej formułuje się w ten sposób, że jej *nadwykres*

$$\Big\{(x,y)\colon \quad x \in [a,b], \quad y \geqslant f(x)\Big\}$$

  ma być zbiorem wypukłym. Analogiczną definicję podaje się dla funkcji wklęsłej.

☞ **Zadanie domowe:** Sprawdzić z definicji, że funkcja $f(x) = x^2$ jest ściśle wypukła, natomiast funkcja $g(x) = |x|$ jest wypukła, ale nie jest ściśle wypukła.

Oczywiście, sprawdzanie wprost z definicji wypukłości (wklęsłości) funkcji może być uciążliwym i żmudnym zadaniem, podobnie jak badanie monotoniczności. Z tego powodu sformułujemy teraz warunki pozwalające badać wypukłość za pomocą pochodnych.

Twierdzenie 7.2. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Wówczas następujące warunki są równoważne:

a) Funkcja $\boldsymbol{f}$ jest ***(słabo) wypukła*** w przedziale (a,b).

b) Pochodna $\boldsymbol{f'}$ jest funkcją ***(słabo) rosnącą (niemalejącą)*** w przedziale (a,b).

c) Dla dowolnych punktów $x, x_0 \in (a,b)$ zachodzi $\boldsymbol{f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**
☞ **Na wykładzie** podamy też charakteryzację funkcji ściśle wypukłej!

Z powyższego twierdzenia i poprzedzającej go uwagi wynika bezpośrednio analogiczne twierdzenie dotyczące funkcji wklęsłych.

Twierdzenie 7.3. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Wówczas następujące warunki są równoważne:

a) Funkcja $\boldsymbol{f}$ jest ***(słabo) wklęsła*** w przedziale (a,b).

b) Pochodna $\boldsymbol{f'}$ jest funkcją ***(słabo) malejącą (nierosnącą)*** w przedziale (a,b).

c) Dla dowolnych punktów $x, x_0 \in (a,b)$ zachodzi $\boldsymbol{f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)}$.

Dowód: ☞ **Ćwiczenie!**
☞ **Ćwiczenie:** Podać charakteryzację funkcji ściśle wklęsłej!

Twierdzenia 7.2 i 7.3, a dokładniej ich podpunkty a) i c), umożliwiają kolejną graficzną charakteryzację różniczkowalnych funkcji wypukłych i wklęsłych. A mianowicie zamiast odcinków łączących dowolne dwa punkty wykresu jak w definicji tych funkcji, można rozważać styczne w dowolnym punkcie ich wykresu. Wykres funkcji wypukłej będzie leżał **powyżej (na)**, a wykres funkcji wklęsłej **poniżej (na)** dowolnej stycznej.

Z wniosku 5.2 dostajemy kolejny warunek równoważny wypukłości (wklęsłości) funkcji dwukrotnie różniczkowalnej.

Twierdzenie 7.4. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją dwukrotnie różniczkowalną. W tym przypadku prawdziwe są następujące stwierdzenia:

- Funkcja $\boldsymbol{f}$ jest ***(słabo) wklęsła*** w przedziale (a,b), jeśli $\boldsymbol{f''(x) \leqslant 0}$ dla wszystkich $x \in (a,b)$;
- Funkcja $\boldsymbol{f}$ jest ***ściśle wklęsła*** w przedziale (a,b), jeśli $\boldsymbol{f''(x) < 0}$ dla wszystkich $x \in (a,b)$;
- Funkcja $\boldsymbol{f}$ jest ***(słabo) wypukła*** w przedziale (a,b), jeśli $\boldsymbol{f''(x) \geqslant 0}$ dla wszystkich $x \in (a,b)$;
- Funkcja $\boldsymbol{f}$ jest ***ściśle wypukła*** w przedziale (a,b), jeśli $\boldsymbol{f''(x) > 0}$ dla wszystkich $x \in (a,b)$.

Dowód: ☞ **Ćwiczenie!**

Z twierdzeń 7.2 i 7.3 (podpunkty a) i b)) oraz z twierdzenia 3.2 dostajemy natychmiast warunki konieczne istnienia punktu przegięcia wykresu funkcji różniczkowalnej.

Twierdzenie 7.5. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną oraz niech $x_0 \in (a,b)$.

a) Jeśli funkcja f ma w x_0 punkt przegięcia, to pochodna f' ma w tym punkcie właściwe ekstremum lokalne.

b) Jeśli funkcja f ma w x_0 punkt przegięcia i jest w tym punkcie dwukrotnie różniczkowalna, to druga pochodna $f''(x_0) = 0$.

Dowód: ☞ **Ćwiczenie!**

Następne twierdzenie podaje warunek konieczny i wystarczający istnienia punktu przegięcia wykresu funkcji dwukrotnie różniczkowalnej.

Wniosek 7.6. Niech funkcja ciągła $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna w sąsiedztwie punktu $x_0 \in (a,b)$.
Funkcja f ma w $x_0 \in (a,b)$ punkt przegięcia wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\varepsilon > 0$, takie że $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a,b)$ i zachodzi jeden z warunków:

- $f''(x) < 0$ dla wszystkich $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ i $f''(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$;
- $f''(x) > 0$ dla wszystkich $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ i $f''(x) < 0$ dla wszystkich $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$.

Przykłady 7.7.

- Funkcje $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \ln(x)$, i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $g(x) = -x^2$, są wklęsłe.
- Funkcja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = \exp(x)$, i $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $g(x) = x^2$, są wypukłe.
- Dana jest funkcja potęgowa $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $f(x) = x^n$ i $n \in \mathbb{N}$.
  Jej druga pochodna $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ jest nieujemna dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i parzystego wykładnika n. Wynika stąd, że funkcja f jest wypukła w całej swej dziedzinie.

  Jeśli natomiast wykładnik n jest nieparzysty, to druga pochodna f'' jest ujemna dla $x < 0$ i dodatnia dla $x > 0$. Zatem funkcja f jest wklęsła w przedziale $(-\infty, 0]$ i wypukła w przedziale $[0,\infty)$, a w punkcie $x_0 = 0$ ma punkt przegięcia.

☞ **Kolejne przykłady** zostaną podane na wykładzie.

8 Badanie przebiegu zmienności funkcji

Załóżmy, że funkcja f dana jest pewnym wzorem, według którego argumentowi x przyporządkowujemy wartość $f(x)$.
Celem *badania przebiegu zmienności* funkcji f jest określenie takich ważnych własności funkcji, jak symetria (parzystość, nieparzystość), okresowość, ekstrema i punkty ich osiągania, monotoniczność itp., a następnie na ich podstawie naszkicowanie wykresu funkcji.
Badanie przebiegu zmienności funkcji powinno przeprowadzać się w sposób systematyczny, przykładowo według następujących punktów:

- Wyznaczenie naturalnej dziedziny D_f funkcji f.
- Sprawdzenie, czy funkcja jest okresowa i parzysta/nieparzysta (zob. wykład *Wstęp do Analizy Matematycznej*).
- Określenie zachowania funkcji f na brzegu dziedziny, tzn. obliczenie granicy $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ dla wszystkich $a \in \overline{D}_f \setminus D_f$ i/lub dla $a = \pm\infty$.
- Wyznaczenie asymptot (zob. wykład *Wstęp do Analizy Matematycznej*).
- Wyznaczenie miejsc zerowych funkcji f i przedziałów, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.
- Obliczenie pochodnych, przeważnie f' i f'', oraz określenie ich dziedzin.
- Określenie przedziałów, w których funkcja f jest rosnąca i malejąca.
- Wyznaczenie ekstremów funkcji f i punktów, w których są osiągane.
- Wyznaczenie przedziałów, w których funkcja f jest wypukła i wklęsła.
- Wyznaczenie punktów przegięcia funkcji f.
- Określenie zbioru wartości funkcji f.
- Naszkicowanie wykresu funkcji f.

Przykład 8.1. Dana jest funkcja

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2} = \begin{cases} \dfrac{-x+1}{x^2} & \text{dla} \quad x < 1, \\[2ex] \dfrac{x-1}{x^2} & \text{dla} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

- Funkcja zdefiniowana jest dla wszystkich liczb rzeczywistych z wyłączeniem miejsc zerowych mianownika, tzn. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Obliczmy granice funkcji przy x zmierzającym do $\pm\infty$:

  $$\lim_{x\to-\infty} \frac{|x-1|}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x+1}{x^2} = 0 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{|x-1|}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0.$$

  Wynika stąd, że prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f w $\pm\infty$.

  Obliczając granice jednostronne w punkcie $x = 0$

  $$\lim_{x\to0^-} \frac{|x-1|}{x^2} = \infty \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{|x-1|}{x^2} = \infty$$

  otrzymujemy, że prosta $x = 0$ jest obustronną asymptotą pionową wykresu funkcji f.
- Punkt $x = 1$ jest jedynym miejscem zerowym funkcji f, poza tym funkcja f przyjmuje tylko wartości dodatnie.

- Pochodna pierwszego rzędu funkcji f równa jest

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^3} & \text{dla} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0,1), \\ \dfrac{-x+2}{x^3} & \text{dla} \quad x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja f nie jest różniczkowalna w punkcie $x = 1$, czyli $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Jedynym miejscem zerowym pochodnej f' jest punkt $x = 2$, ponadto $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 0) \cup (1, 2)$ oraz $f'(x) < 0$ dla $x \in (0, 1) \cup (2, \infty)$. Wynika stąd, że f jest silnie rosnąca w przedziałach $(-\infty, 0)$ i $(1, 2)$, a silnie malejąca w przedziałach $(0, 1)$ i $(2, \infty)$. Zatem funkcja f przyjmuje w punkcie $x = 1$ minimum lokalne o wartości $f(1) = 0$, a w punkcie $x = 2$ maksimum lokalne o wartości $f(2) = \frac{1}{4}$.

- Pochodna drugiego rzędu funkcji f równa jest

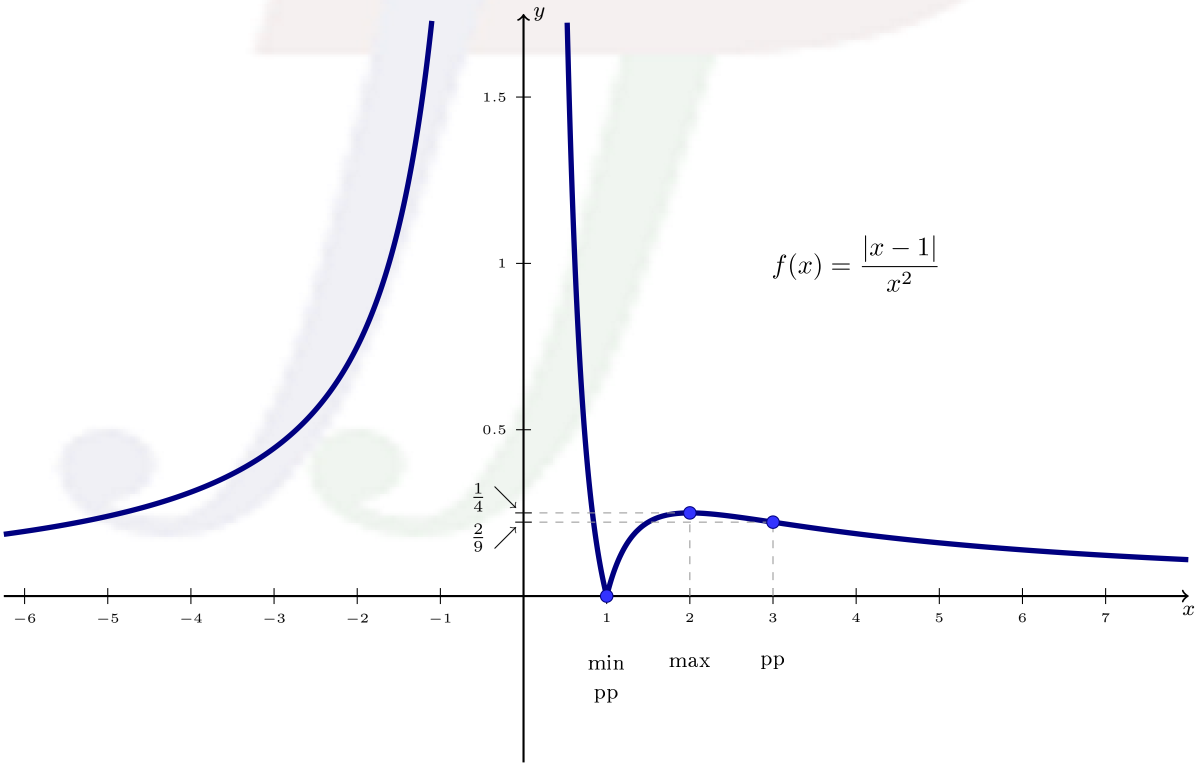
$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2(-x+3)}{x^4} & \text{dla} \quad x \in (-\infty, 0) \cup (0,1), \\ \dfrac{2(x-3)}{x^4} & \text{dla} \quad x \in (1, \infty). \end{cases}$$

Jedynym miejscem zerowym drugiej pochodnej f'' jest punkt $x = 3$, ponadto $f''(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (3, \infty)$ oraz $f''(x) < 0$ dla $x \in (1, 3)$. Wynika stąd, że funkcja f jest wypukła w przedziałach $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ i $(3, \infty)$, a wklęsła w przedziale $(1, 3)$. Zatem punkty $x = 1$ i $x = 3$ są punktami przegięcia wykresu funkcji f.

- Z poprzedzających obliczeń wynika, że zbiorem wartości funkcji f jest $W_f = [0, \infty)$.

- Naszkicowanie wykresu funkcji jest łatwiejsze, jeśli zbierzemy wszystkie uzyskane informacje w przejrzystej formie tabelki:

x	$(-\infty,0)$	**0**	$(0,1)$	**1**	$(1,2)$	**2**	$(2,3)$	**3**	$(3,\infty)$
$f'(x)$	+	×	−	×	+	0	−		−
$f''(x)$	+	×	+	×	−		−	0	+
$f(x)$	0 ↗	$\infty \| \infty$	↘	0 min pp	↗	$\frac{1}{4}$ max	↘	$\frac{2}{9}$ pp	↘ 0



9 Wzór Taylora

W paragrafie 1.2.2 zajmowaliśmy się interpretacją geometryczną pochodnej rozwiązując tzw. problem Leibniza polegający na wyznaczeniu takiej funkcji liniowej $L_a(x) = ax+b$, która w otoczeniu punktu $(x_0, f(x_0))$ możliwie najlepiej aproksymuje (przybliża) różniczkowalną w punkcie x_0 funkcję f. To znaczy tak, aby błąd aproksymacji zmierzał do zera przy $x \to x_0$, ale istotnie szybciej od różnicy $x - x_0$, czyli

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - L_a(x)}{x - x_0} = 0.$$

W tym rozdziale będziemy zajmować się uogólnieniem problemu Leibniza, czyli problemem przybliżania funkcji n-krotnie różniczkowalnej w pewnym punkcie przy pomocy wielomianów:

Niech funkcja rzeczywista $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ będzie n-krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in D_f$. Szukamy wielomianu T_n stopnia co najwyżej $n \in \mathbb{N}$, takiego że

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

W przypadku $n = 1$ rozwiązaliśmy ten problem korzystając z pochodnej $f'(x_0)$ i wprowadzając pojęcie stycznej:

$$T_1(x) := L_s(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Brook Taylor (1685–1735) wykazał istnienie takiego wielomianu T_n w ogólnym przypadku. Motywacją był łatwy do zauważenia związek między współczynnikami wielomianu i wartościami pochodnych wielomianu w zerze (i nie tylko). Dokładniej mówiąc, wielomian jest całkowicie określony, jeżeli znamy wartości jego pochodnych w dowolnie ustalonym punkcie.

Lemat 9.1. [**Wzór Taylora dla wielomianów**]
Niech P będzie wielomianem stopnia n. Wtedy

$$P(x) = P(0) + P'(0)\cdot x + \frac{P''(0)}{2!}\cdot x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k$$

lub

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k,$$

gdzie $P^{(0)}(0)\cdot x^0 \overset{ozn.}{=} P(0)$ lub odpowiednio $P^{(0)}(x_0)\cdot(x-x_0)^0 \overset{ozn.}{=} P(0)$.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Oczywiście, jeśli P jest wielomianem stopnia n, to wszystkie pochodne rzędu większego niż n są równe tożsamościowo zeru. Mniej oczywisty jest fakt, który można udowodnić indukcyjnie (☞ **Na wykładzie!**), że warunek ten spełniają **jedynie** wielomiany odpowiedniego stopnia.

Dla funkcji n-krotnie różniczkowalnej w pewnym punkcie rozważymy teraz wielomian stopnia n ze współczynnikami określonymi za pomocą pochodnych w sposób analogiczny, jak w lemacie 9.1 dla wielomianów. Naturalnie, zgodnie z wcześniejszą uwagą, wielomian ten nie będzie równy funkcji, z której powstał, udowodnimy jednak, że różnica nie będzie duża.

Definicja 9.2. Niech funkcja rzeczywista $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie przynajmniej n-krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a,b)$. Wtedy wielomian postaci

$$T_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

nazywamy n-tym *wielomianem Taylora* funkcji f o środku w punkcie x_0.

Czasami jest korzystniej zapisać wielomian Taylora używając notacji z „h" (tzn. podstawiając $x = x_0 + h$):

$$T_n(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n.$$

Używając znaku sumy możemy zapisać wielomian Taylora w następujący sposób:

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k}$$

lub w notacji alternatywnej

$$T_n(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k,$$

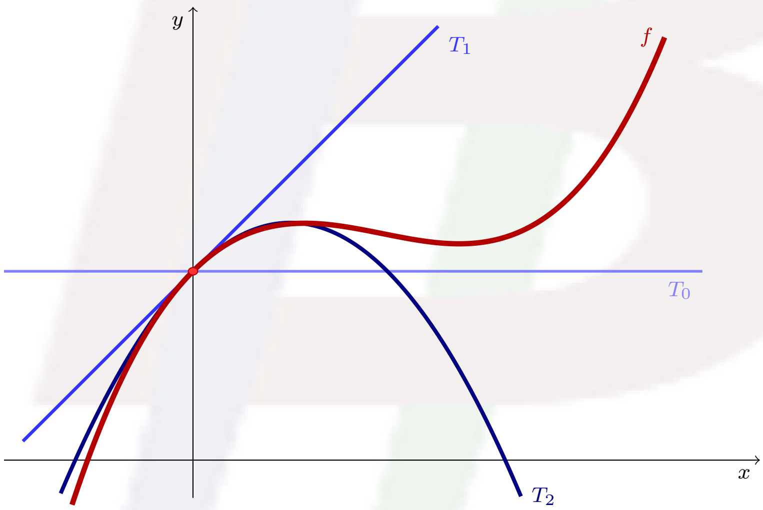
gdzie $f^{(0)}(x_0) \cdot (x - x_0)^0$ (odpowiednio $f^{(0)}(x_0) \cdot h^0$) oznacza $f(x_0)$.

Przedstawmy na rysunku parę pierwszych wielomianów Taylora:

$T_0(x) = f(x_0)$ – funkcja stała

$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ – funkcja liniowa (styczna)

$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2$ – funkcja kwadratowa



Uwaga Zauważmy, że wartości pochodnych (do rzędu n włącznie) wielomianu Taylora w punkcie x_0 równe są wartościom odpowiednich pochodnych funkcji f w tym punkcie, czyli

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \qquad \text{dla} \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Z tego powodu możemy przypuszczać, że w otoczeniu punktu x_0 wielomian T_n dość dobrze przybliża oryginalną funkcję f.

Udowodnimy teraz, że rzeczywiście wielomian Taylora jest jedynym rozwiązaniem problemu sformułowanego na początku rozdziału.

Twierdzenie 9.3. Niech funkcja rzeczywista $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie n-krotnie różniczkowalna w punkcie $x_0 \in (a, b)$. Wówczas

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

gdzie T_n jest n-tym wielomianem Taylora funkcji f o środku w punkcie x_0.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Jeżeli błąd aproksymacji funkcji f wielomianem Taylora T_n oznaczymy

$$r_n(x) := f(x) - T_n(x),$$

to funkcję f możemy zapisać w postaci

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n + r_n(x)}$$

zwanej *wzorem Taylora* funkcji f w punkcie x_0. W przypadku $x_0 = 0$ wzór Taylora nazywany jest *wzorem Maclaurina*.

Natomiast funkcja $r_n(x)$ nazywana jest *resztą Peano* we wzorze Taylora. Oczywiście reszta r_n zależy nie tylko od x, ale także od wybranego punktu x_0, dlatego często oznacza jest jako $r_n(x, x_0)$.

W świetle poprzedniego twierdzenia wzór Taylora możemy także zapisać w postaci

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\cdot(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right)}$$

używając tzw. *notacji Landaua* „o małe".

Notacja $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ przy $x \to x_0$ oznacza, że $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.
Bardziej ogólnie:

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{przy} \quad x \to x_0 \qquad \iff \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Podamy teraz wzory Maclaurina-Taylora dla paru funkcji i ich zastosowanie w liczeniu granic funkcji.

Przykład 9.4. Wzory Maclaurina dla podstawowych funkcji:

❶ Dla $x \to 0$:

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

❷ Dla $x \to 0$:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + r(x),$$

gdzie $r(x) = o(x^{2n+1}) = o(x^{2n+2})$.

❸ Dla $x \to 0$:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + r(x),$$

gdzie $r(x) = o(x^{2n}) = o(x^{2n+1})$.

❹ Dla $x \to 0$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

☞ Szczegóły i zastosowanie do obliczania granic funkcji **na wykładzie!**

Wzór Taylora możemy wykorzystać praktycznie do przybliżonego obliczania wartości zadanych funkcji. Odpowiednie przykłady pojawią się na ćwiczeniach. Z twierdzenia 9.3 wynika, że im większy stopień wielomianu Taylora, tym mniejszy jest błąd aproksymacji

Jeśli jednak chcemy przybliżać funkcję wielomianami Taylora z góry zadaną dokładnością, to potrzebne jest dokładniejsze oszacowanie reszty lub po prostu wyrażenie jej w sposób jawny.

Twierdzenie 9.5. [**Wzór Taylora z resztą Lagrange'a**]
Niech funkcja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie $(n+1)$-krotnie różniczkowalna w sposób ciągły w przedziale (a, b) i niech $x_0 \in (a, b)$ będzie ustalonym punktem. Wtedy dla każdego $x \in (a, b)$ istnieje punkt pośredni $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, gdzie $\theta \in (0, 1)$, taki że

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}.}$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Jeśli we wzorze Taylora podstawimy $n = 0$, to otrzymamy „zerową" aproksymację, która jest równoważna twierdzeniu Lagrange'a 4.2

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0).$$

Twierdzenie 9.5 jest zatem uogólnieniem twierdzenia Lagrange'a zawierającym nie tylko pierwszą, ale wszystkie pochodne funkcji f do rzędu $n + 1$ włącznie.

Prawa strona wzoru Taylora z resztą Lagrange'a wygląda prawie jak $(n + 1)$-wszy wielomian Taylora. Wartość pochodnej $f^{(n+1)}$ nie jest jednak obliczana w punkcie rozwinięcia x_0, ale w pewnym punkcie pośrednim ξ. Twierdzenie nie podaje sposobu, jak wyznaczyć ten punkt. Jeśli jednak jesteśmy w stanie oszacować pochodną $\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$, to powyższy wzór można wykorzystać w podobny sposób, jak twierdzenie Lagrange'a 4.2, do przybliżonych obliczeń i oszacowania błędu otrzymanego przybliżenia.

Przykład 9.6. ☞ **Na ćwiczeniach!**

Wzór Taylora można też wykorzystać do dowodzenia nierówności.

Przykład 9.7. [**Uogólniona nierówność Bernoulliego**]
Niech $x > -1$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &\geqslant 1 + \alpha x \qquad \text{dla} \quad \alpha \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ (1+x)^\alpha &\leqslant 1 + \alpha x \qquad \text{dla} \quad \alpha \in [0, 1]. \end{aligned}$$

W zależności od przyjętych założeń lub oczekiwań możemy rozpatrywać resztę we wzorze Taylora w innych postaciach. Najbardziej znane przedstawienia to np. reszta w postaci Cauchy'ego lub Schlömilcha-Roche'a ☞ **Podręcznik**.

Ten rozdział zakończymy bardzo specyficznym przykładem.

Przykład 9.8. Wyznaczyć wzór Taylora dla funkcji

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Część II

Rachunek całkowy funkcji jednej zmiennej

Całka, obok granicy i pochodnej, należy do grupy najważniejszych pojęć analizy matematycznej. Jest to także pojęcie bardzo szerokie. Nasze rozważania na temat całki rozpoczniemy od wyznaczania funkcji pierwotnej danej funkcji, co możemy potraktować jako operację odwrotną do różniczkowania. Będzie to widoczne przy określaniu własności całki, w dowodach twierdzeń i wyprowadzaniu reguł całkowania.
Jednak obliczanie pochodnych funkcji elementarnych jest czynnością dość techniczną, wystarczy znać odpowiednią liczbę wzorów. Natomiast całkowanie wymaga, co Państwo niedługo zobaczą, większych umiejętności oraz dużej wprawy.

10 Funkcja pierwotna

Definicja 10.1. Niech $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w przedziale otwartym I.
Mówimy, że funkcja $F\colon I \to \mathbb{R}$ jest *funkcją pierwotną* funkcji f w przedziale I, jeśli F jest funkcją różniczkowalną w I oraz $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in I$.

Przykłady 10.2. ☞ **Na wykładzie!**

Funkcja pierwotna, o ile istnieje, nie jest wyznaczona w sposób jednoznaczny!

Zauważmy bowiem, że jeżeli F_0 jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale I, to dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$ funkcja $F_0 + c$ jest także funkcją pierwotną funkcji f w tym przedziale.
Na odwrót: Jeżeli F_0 i F są funkcjami pierwotnymi funkcji f w przedziale I, to istnieje stała $c \in \mathbb{R}$, taka że $F = F_0 + c$. Istotnie, niech $G := F - F_0$, wtedy $G'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0$ dla $x \in I$. Z wniosku 5.2 z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że G jest funkcją stałą w przedziale I.

Zapiszmy nasze rozważania w postaci twierdzenia.

Twierdzenie 10.3. Niech I będzie dowolnym przedziałem otwartym i niech $F_0\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją pierwotną funkcji $f\colon I \to \mathbb{R}$ w przedziale otwartym I. Wówczas funkcja $F\colon I \to \mathbb{R}$ jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale I wtedy i tylko wtedy, gdy $F - F_0$ jest funkcją stałą w I.

Założenie, że funkcja f określona jest na przedziale jest istotne! Gdybyśmy bowiem rozważali funkcję f nie na przedziale, tylko na sumie dwóch (kilku) rozłacznych przedziałów, to wtedy różnica dwóch funkcji pierwotnych funkcji f nie musi być stała.

Przykład 10.4. ☞ **Na wykładzie!**

Naturalne wydaje się pytanie, czy wszystkie funkcje mają funkcje pierwotne. W odpowiedzi na to pytanie często pomaga nam następujące twierdzenie będące wnioskiem z własności Darboux dla pochodnej (zob. Twierdzenie 3.3).

Twierdzenie 10.5. [**Warunek konieczny istnienia funkcji pierwotnej**]
Niech I będzie dowolnym przedziałem otwartym. Jeśli funkcja $f\colon I \to \mathbb{R}$ ma funkcję pierwotną, to f ma własność Darboux w tym przedziale.

Z powyższego twierdzenia wynika przykładowo, że funkcja

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x > 0 \end{cases}$$

nie ma funkcji pierwotnej na zbiorze $\mathbb{R}$.

Natomiast można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10.6. [**Warunek konieczny istnienia funkcji pierwotnej**]
Każda funkcja ciągła $f\colon I \to \mathbb{R}$, gdzie I jest przedziałem otwartym, ma funkcję pierwotną.

Dowód: ☞ **Pojawi się później** (zob. twierdzenie 13.2), ponieważ na razie brakuje nam narzędzi do jego przeprowadzenia.

Uwaga W rachunku różniczkowym, jeśli tylko znamy odpowiednie wzory i reguły różniczkowania, można podać pochodną każdej funkcji różniczkowalnej.
Natomiast nie wszystkie funkcje elementarne mają funkcje pierwotne będące także funkcjami elementarnymi, tzn. takimi funkcjami, które powstają przez skończoną liczbę operacji algebraicznych i składania funkcji wielomianowych, funkcji wykładniczych, funkcji trygonometrycznych i funkcji odwrotnych do nich.
Dotyczy to przykładowo funkcji określonych wzorami

$$f(x) = \sqrt{1+x^3}, \quad x \geqslant -1; \qquad g(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x > 0;$$

$$h(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad x > 1; \qquad k(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Fakt ten był, między innymi, impulsem do zdefiniowania nowych funkcji, które nazywamy często *funkcjami specjalnymi*.

Z liniowości operacji różniczkowania dostajemy poniższe własności funkcji pierwotnej.

Własność 10.7. Niech $F, G\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami pierwotnymi odpowiednio funkcji f i g w przedziale otwartym I oraz niech $\lambda \in \mathbb{R}$.
Wtedy $\lambda \cdot F$ jest funkcją pierwotną funkcji $\lambda \cdot f$ oraz $F + G$ jest funkcją pierwotną funkcji $f + g$ w przedziale I.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Odpowiednik powyższego twierdzenia dla iloczynu funkcji nie zachodzi. Mianowicie, można wskazać funkcje posiadające funkcje pierwotne w przedziale, których iloczyn nie ma funkcji pierwotnej.

Funkcje pierwotne ważniejszych funkcji:

$f(x)$		$F(x)$	
$x \mapsto a,$	$a \in \mathbb{R}$	$x \mapsto a \cdot x + C$	w $\mathbb{R}$
$x^\alpha,$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	w odpowiednich przedziałach
$\frac{1}{x}$		$\ln\lvert x\rvert + C$	w $(-\infty, 0)$ i w $(0, \infty)$
$e^x,$		$e^x + C$	w $\mathbb{R}$
$a^x,$	$a > 0,\ a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C$	w $\mathbb{R}$
$\sin x,$		$-\cos x + C$	w $\mathbb{R}$
$\cos x,$		$\sin x + C$	w $\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x},$		$\operatorname{tg} x + C$	w $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x},$		$-\operatorname{ctg} x + C$	w $(k\pi, \pi + k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$		$\arcsin x + C = -\arccos x + C$	w $(-1, 1)$
$\frac{1}{1+x^2},$	$x \in \mathbb{R}$	$\operatorname{arc\,tg} x + C = -\operatorname{arc\,ctg} x + C$	w $\mathbb{R}$
$\sinh x,$		$\cosh x + C$	w $\mathbb{R}$
$\cosh x,$		$\sinh x + C$	w $\mathbb{R}$

przy czym $C \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą.

Trzeba jednak zdawać sobie sprawę, że litera C na każdym z przedziałów, których suma jest naturalną dziedziną całkowanej funkcji może oznaczać inną stałą (zgodnie z uwagą i przykładem po twierdzeniu 10.3).

W powyższej tabelce brakuje wzorów na pierwotne niektórych funkcji elementarnych, przykładowo nie ma na niej wzoru na pierwotną z tangensa czy z logarytmu. Wynika to z faktu, że funkcje te nie pojawiły się jako pochodne w tabeli z pochodnymi funkcji elementarnych. Wyznaczenie tych pierwotnych wiąże się z koniecznością nauczenia się dodatkowych reguł i wzorów. Ale, jak już wspomnieliśmy, może się zdażyć, że w ogóle nie da się wyrazić pierwotnej funkcji elementarnej za pomocą funkcji elementarnych.

11 Całka nieoznaczona

Aby uprościć zapis wprowadzimy teraz pojęcie całki nieoznaczonej.

Definicja 11.1. Niech $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną w przedziale otwartym I.
Jeśli funkcja f ma funkcję pierwotną w przedziale I, to rodzinę wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f w tym przedziale nazywamy *całką nieoznaczoną* funkcji f w przedziale I i oznaczamy

$$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \Big\{F\colon I \to \mathbb{R}:\quad \forall_{x\in I}\; F'(x) = f(x)\Big\}.}$$

Jeśli funkcja f nie ma funkcji pierwotnej w przedziale I, to mówimy, że funkcja ta nie ma całki nieoznaczonej w tym przedziale.

Twierdzenie 10.3 uzasadnia następujący, używany powszechnie zapis

$$\int f(x)\mathrm{d}x \overset{\text{ozn.}}{=} F(x) + C,$$

gdzie F jest dowolnie wybraną funkcją pierwotną funkcji f na danym przedziale, a $C \in \mathbb{R}$ jest dowolną stałą.

Do wyznaczenia całki nieoznaczonej funkcji w przedziale wystarczy więc obliczenie jednej z jej funkcji pierwotnych w tym przedziale. W literaturze wyznaczanie funkcji pierwotnej oraz całki nieoznaczonej nazywa się *całkowaniem*.

Oznaczenie $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, całki nieoznaczonej funkcji f w przedziale I, pochodzi od Leibniza, a symbol $\mathrm{d}x$ w nim występujący jest związany z definicją całki oznaczonej lub jej geometryczną interpretacją (w zależności od sposobu podejścia).
W oznaczeniu tym nie wystepuje symbol przedziału I. Należy jednak pamiętać, że proces wyznaczania całki nieoznaczonej jest ściśle związany z przedziałem.

Podamy teraz podstawowe twierdzenia dotyczące całki nieoznaczonej, m.in. twierdzenie o liniowości, w którym będziemy dodawać rodziny funkcji i mnożyć rodzinę funkcji przez skalar.
W tym celu wprowadźmy najpierw następujące oznaczenia.

Definicja 11.2. Dla zbiorów $A, B \subseteq \mathbb{R}^I$ funkcji rzeczywistych określonych na zbiorze I przyjmujemy

$$\begin{aligned}
A + B &= \big\{f + g:\quad f \in A \quad \text{i} \quad g \in B\big\}, \\
\alpha A &= \big\{\alpha f:\quad f \in A\big\}, \quad \text{gdzie } \alpha \in \mathbb{R}, \\
g + A &= \big\{g + f:\quad f \in A\big\}, \quad \text{gdzie } g : I \to \mathbb{R}, \\
A \circ \varphi &= \big\{f \circ \varphi:\quad f \in A\big\}, \quad \text{gdzie } \varphi : Y \to \mathbb{R},\ \varphi(Y) \subseteq X.
\end{aligned}$$

Poniższe twierdzenie jest bezpośrednim wnioskiem z własności 10.7.

Twierdzenie 11.3. **[o liniowości całki nieoznaczonej]**
Jeśli istnieją całki nieoznaczone funkcji $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ w przedziale I, to istnieją również całki nieoznaczone funkcji $f + g$ i αf w tym przedziale oraz spełnione są następujące zależności:

$$\boxed{\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x \;=\; \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{i} \qquad \int \alpha f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

11.1 Podstawowe metody całkowania

Podane poniżej metody wyznaczania funkcji pierwotnej wynikają bezpośrednio z reguł dotyczących różniczkowania.

Z twierdzenia 1.8 o arytmetyce pochodnych, a dokładniej ze wzoru na pochodną iloczynu $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 11.4. [**o całkowaniu przez części**]
Niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi w przedziale otwartym I.
Jeśli istnieje całka nieoznaczona funkcji $f' \cdot g$ w przedziale I, to istnieje również całka nieoznaczona funkcji $f \cdot g'$ w tym przedziale oraz

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x) \cdot g(x) \;-\; \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Całkowanie przez części wymaga właściwej intuicji i/lub pewnego doświadczenia. Obliczając całkę nieoznaczoną

$$\int x \cdot \exp(x)\,\mathrm{d}x$$

mamy przykładowo dwie możliwości.

❶ Niech

$$\begin{aligned} f(x) &= x & \Longrightarrow \qquad f'(x) &= 1, \\ g'(x) &= \exp(x) & \Longrightarrow \qquad g(x) &= \exp(x). \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\exp(x)}_{g'}\,\mathrm{d}x &= \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\exp(x)}_{g} - \int \underbrace{1}_{f'} \cdot \underbrace{\exp(x)}_{g}\,\mathrm{d}x = \\ &= x \cdot \exp(x) - \exp(x) + C = (x-1) \cdot \exp(x) + C. \end{aligned}$$

❷ Niech teraz

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp(x) & \Longrightarrow \qquad f'(x) &= \exp(x), \\ g'(x) &= x & \Longrightarrow \qquad g(x) &= \tfrac{1}{2}\,x^2. \end{aligned}$$

Zatem

$$\int \underbrace{x}_{g'} \cdot \underbrace{\exp(x)}_{f}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{1}{2}\,x^2}_{g} \cdot \underbrace{\exp(x)}_{f} - \int \underbrace{\frac{1}{2}\,x^2}_{g} \cdot \underbrace{\exp(x)}_{f'}\,\mathrm{d}x.$$

Ten wybór funkcji f i g' był mało pomocny, ponieważ po zastosowaniu wzoru na całkowanie przez części dostaliśmy do policzenia bardziej skomplikowaną całkę.

Przykład 11.5. Obliczmy całkę nieoznaczoną

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

Niech

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) & \Longrightarrow \qquad f'(x) &= \tfrac{1}{x} \\ g'(x) &= 1 & \Longrightarrow \qquad g(x) &= x. \end{aligned}$$

Ze wzoru na całkowanie przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int \ln(x)\,\mathrm{d}x &= \int \ln(x) \cdot 1\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \\ &= x \cdot \ln(x) - x + C = x \cdot \big(\ln(x) - 1\big) + C. \end{aligned}$$

W szczególności funkcja $x \cdot \big(\ln(x) - 1\big)$ jest funkcją pierwotną logarytmu naturalnego w przedziale $(0, \infty)$.

☞ **Kolejne przykłady** zostaną podane na wykładzie.

Uwaga Metoda całkowania przez części jest szczególnie odpowiednia do obliczania całek postaci

$$\int p(x) \cdot e^{\alpha x}\, dx, \qquad \int p(x) \cdot \ln x \, dx, \qquad \int p(x) \cdot \sin(\alpha x)\, dx, \qquad \int p(x) \cdot \cos(\alpha x)\, dx,$$

gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$, a p jest funkcją wielomianową.

Z twierdzenia 1.10 o pochodnej funkcji złożonej $(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi'$ wynika kolejne twierdzenie ważne dla efektywnego wyznaczania całek:

Twierdzenie 11.6. [o całkowaniu przez podstawienie]
Niech I i J będą otwartymi przedziałami oraz niech funkcja $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna, przy czym $\varphi(J) \subseteq I$.
Jeśli istnieje całka nieoznaczona funkcji $f\colon I \to \mathbb{R}$ w przedziale I, to istnieje całka nieoznaczona funkcji $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ w przedziale J oraz

$$\boxed{\int f\left(\varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x)\, dx \;=\; \left(\int f(y)\, dy\right) \circ \varphi(x) \;=\; \int f(y)\, dy\,\Big|_{y=\varphi(x)}.}$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Jeżeli funkcja φ jest odwracalna, to powyższy wzór można przekształcić do postaci

$$\boxed{\int f(y)\, dy \;=\; \int f\left(\varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x)\, dx\,\Big|_{x=\varphi^{-1}(y)}}$$

zwany *wzorem na całkowanie przez zamianę zmiennych.*

W pierwszej wersji próbujemy przedstawić funkcję podcałkową w postaci $f\left(\varphi(x)\right) \cdot \varphi'(x)$. Jeśli, przy tym przedstawieniu, znamy funkcję pierwotną funkcji f, to zakończyliśmy obliczanie całki nieoznaczonej. Musimy jedynie pamiętać o powrocie do oryginalnej zmiennej podstawiając $y = \varphi(x)$.
W drugiej wersji rozpoczynamy obliczenia od całki nieoznaczonej $\int f(y)\, dy$ i wprowadzamy nową zmienną $y = \varphi(x)$, a następnie korzystamy z zależności $dy = \varphi'(x)\, dx$ (zob. paragraf 1.2.3). Oczywiście funkcję φ należy tak wybrać, aby nowa całka była łatwiejsza do obliczenia. Po zakończeniu obliczeń powracamy do oryginalnej zmiennej.
W następnym przykładzie rozważymy oba podejścia.

Przykłady 11.7.

❶ Obliczamy całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{x^4}{\left(x^5+1\right)^3}\, dx.$$

Zauważmy najpierw, że funkcja $x \mapsto 5x^4$ jest pochodną funkcji $x \mapsto x^5 + 1$. Z tego powodu zapiszmy powyższą całkę w nieco innej postaci:

$$\int \frac{x^4}{\left(x^5+1\right)^3}\, dx \;=\; \frac{1}{5}\int \frac{5x^4}{\left(x^5+1\right)^3}\, dx.$$

Używając oznaczeń z twierdzenia 11.6 mamy

$$y = \varphi(x) := x^5 + 1 \quad\Longrightarrow\quad dy = 5x^4\, dx \qquad \text{i} \qquad f(y) = \frac{1}{y^3} = y^{-3},$$

skąd

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4}{\left(x^5+1\right)^3}\, dx \;&=\; \frac{1}{5}\int \underbrace{\frac{1}{\left(x^5+1\right)^3}}_{\frac{1}{y^3}} \cdot \underbrace{5x^4\, dx}_{dy} \;=\; \frac{1}{5}\int y^{-3}\, dy \;=\\ &=\; \frac{1}{5} \cdot \frac{y^{-3+1}}{-3+1} + C \;=\; \frac{1}{5} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{y^2} + C \;=\; -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{\left(x^5+1\right)^2} + C,\end{aligned}$$

gdzie C jest stałą całkowania.

❷ Obliczamy całkę nieoznaczoną
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}}.$$
Niech $x = t^6$, gdzie $t \in (0, \infty)$. Wtedy
$$\mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t,$$
a wyrażenie w mianowniku funkcji podcałkowej przyjmuje postać
$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x} = \sqrt[3]{t^{12}} + \sqrt{t^6} = t^4 + t^3.$$
Z twierdzenia o całkowaniu przez zamianę zmiennych otrzymujemy
$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x}} &= \int \frac{6t^5}{t^4+t^3}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t = 6\int \frac{t^2-1+1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \\ &= 6\int\left(\frac{t^2-1}{t+1}+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = 6\int (t-1)\,\mathrm{d}t + 6\int \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \\ &= 6\left(\frac{1}{2}t^2 - t\right) + 6\ln|t+1| + C = \\ &= 6\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|\right) + C,\end{aligned}$$
gdzie C jest stałą całkowania.

❸ ☞ **Kolejne przykłady** zostaną podane na wykładzie.

Z twierdzenia 11.6, stosując podstawienie $y = f(x)$, wynikają dwa użyteczne wzory:

Uwaga 11.8.

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c \quad \text{i} \quad \int (f(x))^p \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(f(x))^{p+1}}{p+1}, \quad p \neq -1.$$

11.2 Wzory rekurencyjne

Całki nieoznaczone
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}, \qquad \int \sin^n x\mathrm{d}x, \qquad \int \cos^n x\mathrm{d}x$$
zależne od parametru $n \in \mathbb{N}$ możemy obliczać stosując dla $n > 1$ tzw. *wzory rekurencyjne*

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}},$$

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx,$$

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\sin x \cdot \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx,$$

które pozwalają sprowadzić je do odpowiednich całek o parametrze $n = 0$ lub $n = 1$.

Uzasadnienie: ☞ **Na wykładzie!**
W dowodzie istotną rolę odgrywa twierdzenie 11.4 o całkowaniu przez części.

Szczególnie użyteczny będzie dla nas pierwszy z tych wzorów.

11.3 Całkowanie funkcji wymiernych

Naszym celem będzie teraz podanie metod efektywnego obliczania funkcji pierwotnych pewnych funkcji. Rozpoczniemy od obliczania funkcji pierwotnych funkcji wymiernych, a następnie pokażemy, jak sprowadzić pewne inne rodziny funkcji do tego przypadku. Proszę zwrócić uwagę, że w przykładach 11.7 wyznaczaliśmy już całki nieoznaczone z funkcji wymiernych. Po zapoznaniu się z niżej opisaną metodą warto jeszcze raz na nie spojrzeć, szczególnie na drugi z nich.

Przedstawione poniżej fakty i twierdzenia są czysto algebraiczne, dlatego pozwolimy sobie ominąć ich dowody. Zainteresowanych odsyłamy do literatury.

Niech zatem $f = \frac{P}{Q}$, gdzie P i Q są pewnymi wielomianami. Chcemy wyznaczyć całkę $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

❶ Jeżeli stopień wielomianu P jest równy lub większy od stopnia wielomianu Q, to dzielimy wielomian P przez Q i przedstawiamy go w postaci

$$P = W \cdot Q + R,$$

gdzie W i R są wielomianami i stopień wielomianu R jest mniejszy od stopnia wielomianu Q.
Wynika stąd, że

$$f = \frac{P}{Q} = W + \frac{R}{Q}.$$

Twierdzenie 11.3 o liniowości całki pozwala sprowadzić obliczanie całki funkcji f do obliczania całki wielomianu W i całki funkcji wymiernej $\frac{R}{Q}$.

Do obliczenia całki nieoznaczonej wielomianu stosujemy znane nam już wzory podane w tabelce funkcji pierwotnych podstawowych funkcji.

❷ Załóżmy zatem teraz, że w funkcji wymiernej $f = \frac{P}{Q}$ stopień wielomianu P jest mniejszy od stopnia wielomianu Q oraz że są one wielomianami nie posiadającymi wspólnych dzielników, tzn. P i Q nie dzielą się przez ten sam wielomian dodatniego stopnia.

Następnie do wielomianu Q stosujemy podstawowe twierdzenie algebry mówiące, że każdy wielomian dodatniego stopnia (o współczynnikach rzeczywistych) jest iloczynem skończonej liczby wielomianów stopnia pierwszego oraz wielomianów stopnia 2, które nie mają pierwiastków.
Istnieją zatem parami różne wielomiany stopnia pierwszego $L_i(x) = x - a_i$, liczby $k_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, r$, oraz parami różne wielomiany stopnia drugiego $K_i(x) = x^2 + p_j x + q_j$ nie mające pierwiastków rzeczywistych (tj. $p_j^2 - 4q_j < 0$) i liczby $l_j \in \mathbb{N}$, $j = 1, \ldots, s$, oraz liczba $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, takie że

$$Q(x) = \alpha\,(x - a_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x - a_r)^{k_r} \cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{l_1} \cdot \ldots \cdot \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{l_s}.$$

Może się zdarzyć, że Q jest iloczynem tylko dwumianów lub iloczynem tylko trójmianów.

Pewną trudnością w tym podpunkcie jest fakt, że nie mamy efektywnych metod uzyskiwania powyższego rozkładu.

❸ Następnie rozkładamy funkcję $f = \frac{P}{Q}$ na tzw. *ułamki proste*:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{k=1}^{k_i} \frac{A_{i,k}}{(x - a_i)^k} + \sum_{j=1}^{s} \sum_{l=1}^{l_i} \frac{B_{j,l} \cdot x + C_{j,l}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{l_j}},$$

gdzie $A_{i,k}$, $i = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, k_i$, oraz $B_{j,l}$ i $C_{j,l}$, $j = 1, \ldots, s$, $l = 1, \ldots, l_j$, są pewnymi stałymi zależnymi od funkcji f.

Metodę rozkładu funkcji wymiernej na ułamki proste przedstawimy na przykładzie podanym na wykładzie i zadaniach z listy zadań przerabianych na ćwiczeniach.

❹ Kolejnym krokiem zatem jest całkowanie ułamków prostych postaci

$$\frac{A}{(x - a)^n} \quad \text{i} \quad \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n},$$

przy czym zakładamy, że trójmian kwadratowy $x^2 + px + q$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, czyli $p^2 - 4q < 0$.

Bezpośrednio z definicji całki nieoznaczonej otrzymujemy, że

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} A\ln|x-a|+c & \text{dla} \quad n=1, \\ \dfrac{A}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}}+c & \text{dla} \quad n>1, \end{cases}$$

w przedziałach $(-\infty,a)$ i $(a,+\infty)$, gdzie c jest dowolną stałą.

Całkę z drugiego ułamka prostego przedstawiamy w postaci

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x + \left(C-\frac{Bp}{2}\right)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}.$$

Pierwsza z występujących w powyższej sumie całek jest szczególnej postaci podanej w uwadze 11.8 na stronie 41, skąd

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \ln|x^2+px+q|+c & \text{dla} \quad n=1, \\ \dfrac{1}{(1-n)\cdot(x^2+px+q)^{n-1}}+c & \text{dla} \quad n>1, \end{cases}$$

w zbiorze $\mathbb{R}$, gdzie c jest dowolną stałą.

Pozostaje nam zatem rozważyć całkę $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n}$. Trójmian kwadratowy w mianowniku przekształcamy do postaci kanonicznej

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4},$$

a następnie stosujemy podstawienie

$$x+\frac{p}{2} = \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}\,t$$

w którym $\mathrm{d}x = \sqrt{-\frac{\Delta}{4}}\,\mathrm{d}t$. Stosując twierdzenie 11.6 o całkowaniu przez podstawienie otrzymujemy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^n} = \left(-\frac{\Delta}{4}\right)^{\frac{1}{2}-n}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^n}.$$

Na koniec, stosując pierwszy ze wzorów rekurencyjnych podanych w podrozdziale 11.2 obliczamy ostatnią z całek.

Przykład: ☞ **Tylko na wykładzie!**

11.4 Całkowanie funkcji trygonometrycznych

W poprzednim rozdziale zapoznaliśmy się z metodą obliczania całek z funkcji wymiernych. Okazuje się, że całki z wielu innych typów funkcji można sprowadzić przez odpowiednie podstawienia do całek z funkcji wymiernych.

Funkcję $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ daną wzorem $f(u,v)=au^kv^l$, gdzie $(u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ i $k,l\in\mathbb{N}$, nazywamy *jednomianem dwóch zmiennych*. Natomiast funkcje $W\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będące sumami skończonej liczby jednomianów dwóch zmiennych będziemy nazywać *wielomianami dwóch zmiennych*. Jeśli P,Q są wielomianami dwóch zmiennych takimi, że Q nie znika tożsamościowo, to funkcję

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$$

określoną w zbiorze $\Big\{(u,v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon \quad Q(u,v)\neq 0\Big\}$ nazywamy *funkcją wymierną dwóch zmiennych*.

Jeśli funkcje $\psi_1,\psi_2\colon \mathcal{I}\to\mathbb{R}$ są funkcjami wymiernymi jednej zmiennej określonymi w każdym punkcie x przedziału $\mathcal{I}$, a punkty $\big(\psi_1(x),\psi_2(x)\big)$ należą do dziedziny funkcji wymiernej dwóch zmiennych R, to funkcja $f(x)=R\left(\psi_1(x),\psi_2(x)\right)$, gdzie $x\in\mathcal{I}$, jest obcięciem funkcji wymiernej.

Rozważmy teraz całkę nieoznaczoną postaci

$$\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x,}$$

gdzie R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych.
Można pokazać, że funkcja podcałkowa $f(x) = R(\sin x, \cos x)$ ma funkcję pierwotną będącą funkcją elementarną w każdym przedziale, w którym jest określona.

11.4.1 Podstawienie uniwersalne

W przedziałach $\mathcal{I} \subseteq (-\pi, \pi)$ możemy zastosować (zob. tw. 11.6) podstawienie uniwersalne:

$$\boxed{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad x \in (-\pi, \pi).}$$

Inaczej mówiąc

$$x = \varphi(t) = 2\operatorname{arc\,tg} t,$$

skąd

$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ponadto ze wzorów na sinus i cosinus kąta podwojonego otrzymujemy

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad \text{i} \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

zatem

$$\sin x\Big|_{x=\varphi(t)} = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \text{i} \qquad \cos x\Big|_{x=\varphi(t)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Korzystając ze wzoru na całkowanie przez zamianę zmiennych (str. 40) mamy

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Zgodnie z uwagą powyżej ostatnia całka jest całką z funkcji wymiernej.

Jeśli natomiast szukamy funkcji pierwotnej w przedziałach $\mathcal{I} \subseteq (0, 2\pi)$, to stosujemy podstawienie

$$t = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}, \qquad x \in (0, 2\pi),$$

i postępujemy jak wyżej.

Korzystając z okresowości funkcji postaci $f(x) = R(\sin x, \cos x)$, gdzie R jest funkcją wymierną dwóch zmiennych, wystarczy umieć obliczać całki nieoznaczone takich funkcji w podprzedziałach przedziału $(-\pi, \pi)$ lub odpowiednio $(0, 2\pi)$.

Przykład: ☞ **Tylko na wykładzie!**

11.4.2 Szczególne przypadki

W szczególnych przypadkach, jeśli funkcja wymierna R ma pewne dodatkowe własności, to korzystniej jest stosować inne podstawienia:

❶ Funkcja R jest parzysta względem obu zmiennych, tzn. gdy $R(-u, -v) = R(u, v)$, to stosujemy podstawienie

$$t = \operatorname{tg} x.$$

❷ Funkcja R jest nieparzysta względem zmiennej u, tzn. gdy $R(-u, v) = -R(u, v)$, to stosujemy podstawienie

$$t = \cos x.$$

❸ Funkcja R jest nieparzysta względem zmiennej v, tzn. gdy $R(u, -v) = -R(u, v)$, to stosujemy podstawienie

$$t = \sin x.$$

Przykład: ☞ **Tylko na wykładzie!**

11.5 Całkowanie funkcji niewymiernych

Ponownie niech R będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych, niech a, b, c i d będą ustalonymi liczbami rzeczywistymi i niech $\mathcal{I}$ będzie przedziałem.

Rozważmy teraz funkcję

$$\boxed{f(x) = R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right),}$$

gdzie $x \in \mathcal{I}$ oraz $ad - bc \neq 0$.

Wyznaczając funkcję pierwotną (całkę nieoznaczoną) funkcji f w przedziale $\mathcal{I}$ stosujemy podstawienie

$$\boxed{t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},}$$

skąd otrzymujemy

$$x = \frac{d \cdot t^n - b}{a - c \cdot t^n} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{d}x = \frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(a - c \cdot t^n)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Następnie stosujemy wzór na całkowanie przez zamianę zmiennych (str. 40) i otrzymujemy całkę z funkcji wymiernej, ponieważ R i $x = x(t)$ są funkcjami wymiernymi odpowiednio dwóch i jednej zmiennej.

Przykład: ☞ **Tylko na wykładzie!**

11.5.1 Pierwsze podstawienie Eulera

Rozważmy całkę nieoznaczoną

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x,}$$

gdzie $x \in \mathcal{I}$ oraz $a > 0$ i $\Delta \neq 0$.

Stosujemy podstawienie

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = (t-x)\cdot\sqrt{a},}$$

skąd otrzymujemy

$$x = \frac{at^2 - c}{2at + b} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2a\left(at^2+bt+c\right)}{(2at+b)^2}\,\mathrm{d}t$$

oraz

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (t-x)\cdot\sqrt{a} = \sqrt{a}\,\frac{at^2+bt+c}{2at+b}.$$

Ponownie stosujemy wzór na całkowanie przez zamianę zmiennych (str. 40) i otrzymujemy całkę z funkcji wymiernej.

Przykład: ☞ **Tylko na wykładzie!**

11.5.2 Drugie podstawienie Eulera

Rozważmy całkę nieoznaczoną

$$\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) \mathrm{d}x,}$$

gdzie $x \in \mathcal{I}$ oraz $a < 0$. Wtedy musi być prawdziwa nierówność $\Delta > 0$, bowiem w przeciwnym przypadku funkcja podcałkowa określona jest co najwyżej w jednym punkcie, więc nie można mówić o jej funkcji pierwotnej. Trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ ma zatem dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1 i x_2 i można go zapisać w postaci iloczynowej

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2).$$

Stosujemy teraz podstawienie

$$\boxed{\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_1),}$$

skąd otrzymujemy

$$x = \frac{ax_2 - t^2 x_1}{a - t^2} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2ta(x_2 - x_1)}{(a - t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$

oraz

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{at(x_2 - x_1)}{a - t^2}.$$

Ponownie stosujemy wzór na całkowanie przez zamianę zmiennych (str. 40) i otrzymujemy całkę z funkcji wymiernej zmiennej t.

Przykład: ☞ **Tylko na wykładzie!**

11.5.3 Szczególne przypadki

Rozważmy całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+d}},$$

gdzie $x \in \mathcal{I}$. Do obliczeń wykorzystujemy pierwsze podstawienie Eulera

$$\sqrt{x^2+d} = t - x,$$

skąd otrzymujemy

$$x = \frac{t^2 - d}{2t} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{d}x = \frac{t^2 + d}{2t^2}\,\mathrm{d}t$$

oraz

$$\sqrt{x^2+d} = t - x = \frac{t^2+d}{2t}.$$

Ze wzoru na całkowanie przez zamianę zmiennych wynika, że

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+d}} = \int \frac{2t}{t^2+d} \cdot \frac{t^2+d}{2t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t|\Big|_{t=x+\sqrt{x^2+d}} + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+d}\right| + C.$$

Zapisując teraz nowy wzór

$$\boxed{\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+d}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+d}\right| + C, \qquad \text{gdzie } d \in \mathbb{R},}$$

w tabeli funkcji pierwotnych (i w naszej głowie) możemy łatwo obliczyć wszystkie całki postaci

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

gdzie $x \in \mathcal{I}$ i $a > 0$.

W tym celu zapiszmy rozpatrywany trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

i zastosujmy podstawienie

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\,t.$$

Otrzymujemy wtedy

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\,t\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}\,\mathrm{d}t$$

a obliczana całka sprowadza się do całki

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 \pm 1}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|t + \sqrt{t^2 \pm 1}\right|\Big|_{t=\frac{2a}{\sqrt{|\Delta|}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)} + C,$$

zależnej od znaku wyróżnika trójmianu kwadratowego.

W przypadku, gdy współczynnik $a < 0$ (wtedy $\Delta > 0$), korzystamy również z postaci kanonicznej trójmianu kwadratowego i stosujemy analogiczne podstawienie. Otrzymujemy wtedy

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{-a}\cdot\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2} - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\,t\right)^2} \qquad \text{i} \qquad \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\,\mathrm{d}t$$

a obliczana całka sprowadza się do całki

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{-1}{\sqrt{-a}}\arcsin t\Big|_{t=\frac{2a}{\sqrt{\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)} + C.$$

Ale zdecydowanie lepiej będzie jak zilustrujemy tą metodę na przykładach.
Przykład: ☞ **Tylko na wykładzie!**

Metoda współczynników nieoznaczonych

Umiejętność obliczania całek $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ możemy wykorzystać do obliczania całek postaci

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x,$$

gdzie P_n jest wielomianem stopnia n, współczynnik $a \neq 0$ i wyróżnik $\Delta \neq 0$.

Korzystamy przy tym z jednoznacznego przedstawienia powyższej całki w postaci

$$\boxed{\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,\mathrm{d}x = P_{n-1}(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c} + K\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}},}$$

gdzie P_{n-1} jest wielomianem stopnia $n-1$. Różniczkując obustronnie powyższą równość, a następnie mnożąc ją obustronnie przez $\sqrt{ax^2+bx+c}$, otrzymujemy równość wielomianów stopnia n. Porównując ich współczynniki wyznaczamy stałą K i wielomian P_{n-1}.

Przykład: ☞ **Tylko na wykładzie!**

Podstawienia trygonometryczne

W przypadku całek, w których występują wyrażenia postaci $\sqrt{a^2 - x^2}$, warto czasami korzystać przykładowo z podstawienia $x = a \sin t$, gdzie $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Podstawienia hiperboliczne

W przypadku całek, w których występują wyrażenia postaci $\sqrt{x^2 \pm a^2}$, warto czasami korzystać z tzw. podstawień hiperbolicznych i znanej nam zależności zwanej *jedynką hiperboliczną*

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Gdy mamy do czynienia z wyrażeniem

❶ $\sqrt{x^2 - a^2}$, stosujemy podstawienie $x = a \cosh t$, gdzie $t > 0$;

❷ $\sqrt{x^2 + a^2}$, stosujemy podstawienie $x = a \sinh t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Uwaga Proszę pamiętać, że nie przedstawiliśmy tutaj wszystkich metod całkowania!
Zainteresowanych i uczących się do egzaminu odsyłamy do listy zadań przerabianej na ćwiczeniach, zbiorów zadań (np. W. Krysicki, L. Włodarski „*Analiza matematyczna w zadaniach*”) bądź podręczników (np. G.M. Fichtenholz „*Rachunek różniczkowy i całkowy*”).

12 Całka oznaczona Riemanna

W tym rozdziale omówimy pojęcie całki oznaczonej z ograniczonej funkcji rzeczywistej f określonej na przedziale $[a, b]$. Mimo, że pojęcie to samo w sobie jest intuicyjnie proste można je sformalizować na wiele sposobów. Jednak jeśli jakaś funkcja jest całkowalna według dwóch różnych definicji, to wynik całkowania powinien być taki sam!

Najłatwiejszą całkę oznaczoną jest tzw. całka Newtona-Leibniza zdefiniowana jako przyrost wartości funkcji pierwotnej na przedziale $[a, b]$. Z tego powodu często rozpoczyna się przygodę z całkowaniem od obliczania całek nieoznaczonych.

Definicja 12.1. Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą.
Całką oznaczoną Newtona-Leibniza funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; F(b) - F(a),}$$

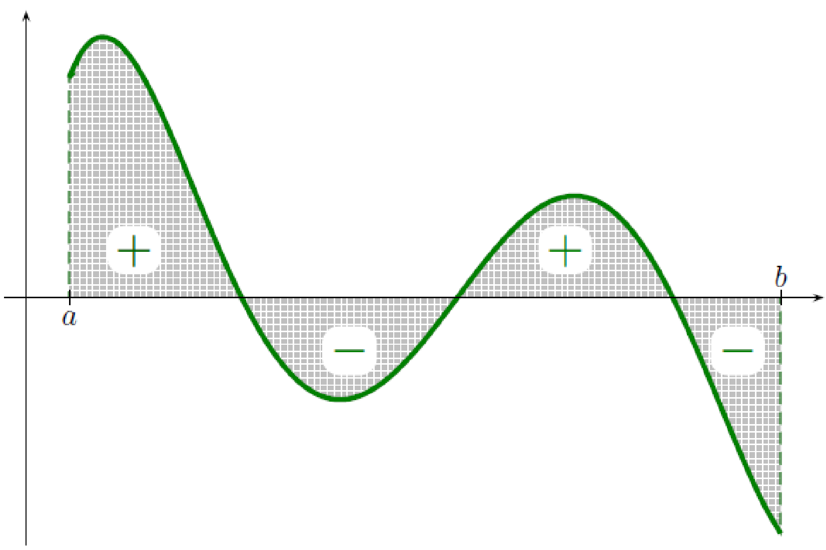
gdzie F jest dowolną pierwotną funkcji f.

Nietrudno zauważyć, że definicja jest poprawna, to znaczy nie zależy od wyboru funkcji pierwotnej. Wynika to z twierdzenia 10.3, w którym wykazaliśmy, że dwie pierwotne funkcji ciągłej na przedziale różnią się o stałą.

Mimo prostoty nie będziemy dalej rozwijać tego pojęcia. Natomiast dalszą część wykładu poświęcimy tzw. *całce oznaczonej Riemanna*. Nawiązując do korzeni można powiedzieć, że całka oznaczona Riemanna z funkcji ograniczonej $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, którą również oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

odpowiada polu obszaru ograniczonego wykresem funkcji f, osią odciętych oraz prostymi o równaniach $x = a$ i $x = b$, przy czym pole części leżących powyżej osi Ox wzięte są ze znakiem plus, a pole części leżących poniżej osi Ox ze znakiem minus (tzw. *pole zorientowane*).



Całka Riemanna ma przewagę nad całką Newtona. Dla funkcji ciągłej oba pojęcia pokrywają się, ale definicja całki Riemanna ma sens także dla pewnych funkcji nie mających funkcji pierwotnej np. dla wspomnianej po twierdzeniu 10.5 funkcji signum. Mówimy, że klasa funkcji całkowalnych w sensie Riemanna jest większa niż klasa funkcji całkowalnych w sensie Newtona-Leibniza.

12.1 Suma dolna i górna Darboux, suma całkowa Riemanna

Formalna definicja całki oznaczonej Riemanna wymaga pewnych przygotowań.

W tym rozdziale będziemy zakładać, że $f \in \mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$, tzn. f jest funkcją ograniczoną. Istnieją zatem takie liczby $m, M \in \mathbb{R}$, że

$$m = \inf\Big\{f(x) : \; x \in [a,b]\Big\} \qquad \text{oraz} \qquad M = \sup\Big\{f(x) : \; x \in [a,b]\Big\}.$$

Definicja 12.2. *Podziałem przedziału* $[a,b]$, gdzie $a < b$, na n części nazywamy dowolny silnie rosnący ciąg punktów

$$\boxed{\mathcal{P} = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \subseteq [a,b]}$$

taki, że

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Liczbę

$$\boxed{\delta = \delta(\mathcal{P}) := \max\{\Delta x_i : \; i = 1, \ldots, n\},}$$

gdzie $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$, nazywamy *średnicą podziału* $\mathcal{P}$.

Zauważmy, że nazwa ***podział*** w powyższej definicji jest jak najbardziej uzasadniona. Każdy wybór punktów $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ spełniających warunek $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ oznacza bowiem podział przedziału $[a,b]$ na n podprzedziałów, tzn. $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$.

Definicja 12.3. *Układem punktów pośrednich* dla ustalonego podziału $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ odcinka $[a,b]$ nazywamy ciąg punktów

$$\boxed{\mathcal{X} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \subseteq [a,b]}$$

spełniający warunek

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Definicja 12.4. Niech $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ będzie ustalonym podziałem odcinka $[a,b]$ oraz niech

$$m_i := \inf\Big\{f(x) : \; x \in [x_{i-1}, x_i]\Big\} \qquad \text{oraz} \qquad M_i := \sup\Big\{f(x) : \; x \in [x_{i-1}, x_i]\Big\}.$$

Wówczas

❶ sumę

$$s = s(f, \mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$$

nazywamy *sumą dolną (Darboux)* funkcji f względem podziału $\mathcal{P}$.

❷ sumę

$$\sigma = \sigma(f, \mathcal{P}, \mathcal{X}) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

nazywamy *sumą całkową (Riemanna)* funkcji f względem podziału $\mathcal{P}$ i punktów pośrednich $\mathcal{X}$.

❸ sumę

$$S \;=\; S(f,\mathcal{P}) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$$

nazywamy *sumą górną (Darboux)* funkcji f względem podziału $\mathcal{P}$.

Niech $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ będzie przykładowo tzw. *równomiernym podziałem* odcinka $[a, b]$ na n podprzedziałów długości $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ dla $i = 1, \ldots, n$, czyli

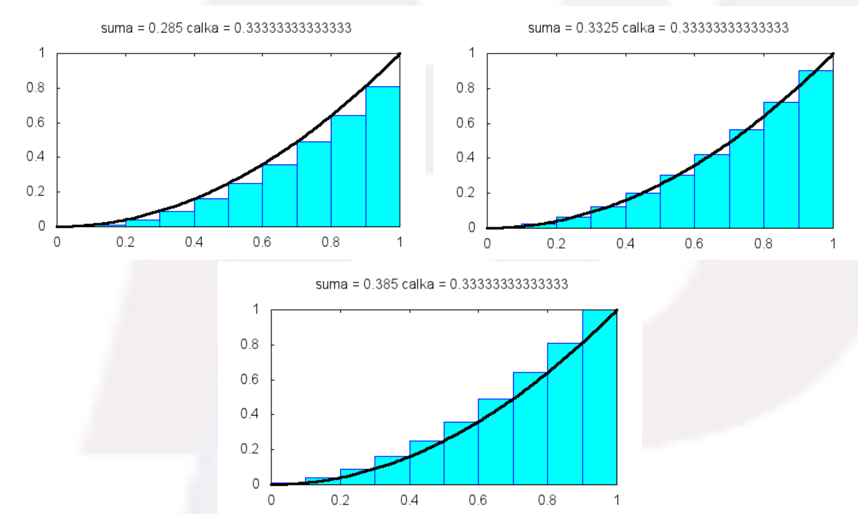
$$x_0 = a, \qquad x_1 = a + \frac{b-a}{n}, \qquad x_2 = a + \frac{2\cdot(b-a)}{n}, \qquad \ldots, \qquad x_n = a + \frac{n\cdot(b-a)}{n} = b.$$

Wybieramy, dla $i = 1, \ldots, n$, dowolne *punkty pośrednie* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ i utwórzmy *sumę całkową*

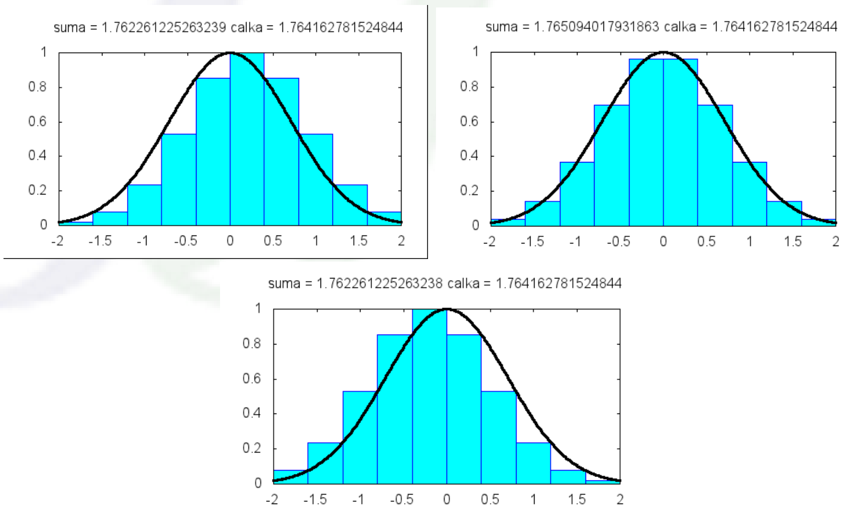
$$\sigma(f,\mathcal{P},\mathcal{X}) \;=\; \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(\xi_i\right)$$

funkcji f względem podziału $\mathcal{P}$ i punktów pośrednich $(\xi_i)_{i=1,\ldots,n}$.

Rozważmy teraz funkcję $f(x) = x^2$ na przedziale $[0, 1]$, wtedy przykładowo



Natomiast dla funkcji $f(x) = \exp(-x^2)$ na przedziale $[-2, 2]$ otrzymamy przykładowo



Dla obu funkcji punkty pośrednie zostały wybrane kolejno w następujący sposób:

❶ $\xi_i = x_{i-1} = a + (i-1) \cdot \frac{(b-a)}{n}$ – początek przedziału $[x_{i-1}, x_i]$,

❷ $\xi_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} = a + \left(i - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(b-a)}{n}$ – środek przedziału $[x_{i-1}, x_i]$,

❸ $\xi_i = x_i = a + i \cdot \frac{(b-a)}{n}$ – koniec przedziału $[x_{i-1}, x_i]$

dla $i = 1, \ldots, n$.

Łatwo zauważyć, że

$$\boxed{m(b-a) \leqslant s(f,\mathcal{P}) \leqslant \sigma(f,\mathcal{P},\mathcal{X}) \leqslant S(f,\mathcal{P}) \leqslant M(b-a)}$$

dla ustalonego podziału $\mathcal{P}$, ponieważ z definicji kresów

$$m \leqslant m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant M_i \leqslant M \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n,$$

gdzie $m = \inf\left\{f(x)\colon\ x \in [a,b]\right\}$ i $M = \sup\left\{f(x)\colon\ x \in [a,b]\right\}$.

Możemy także udowodnić następujący lemat

Lemat 12.5. Niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem przedziału $[a,b]$. Wtedy prawdziwe są następujące stwierdzenia

❶ Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki układ punktów pośrednich $\mathcal{X}$, że

$$\sigma(f,\mathcal{P},\mathcal{X}) < s(f,\mathcal{P}) + \varepsilon.$$

❷ Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje taki układ punktów pośrednich $\mathcal{X}$, że

$$\sigma(f,\mathcal{P},\mathcal{X}) > S(f,\mathcal{P}) - \varepsilon.$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

12.2 Całka dolna i górna Darboux, całka Riemanna

Niech teraz $(\mathcal{P}_n)_{n>0} = \left(x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\right)_{n>0}$ będzie ciągiem podziałów przedziału $[a,b]$, tzn.

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1\colon &\quad a = x_0^{(1)} < x_1^{(1)} < x_2^{(1)} < \ldots < x_{k_1}^{(1)} = b,\\
\mathcal{P}_2\colon &\quad a = x_0^{(2)} < x_1^{(2)} < x_2^{(2)} < \ldots < x_{k_2}^{(2)} = b,\\
\mathcal{P}_3\colon &\quad a = x_0^{(3)} < x_1^{(3)} < x_2^{(3)} < \ldots < x_{k_3}^{(3)} = b,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathcal{P}_n\colon &\quad a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_{k_n}^{(n)} = b,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

o średnicach

$$\delta_n := \delta(\mathcal{P}_n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Definicja 12.6. Ciąg $(\mathcal{P}_n)_{n>0}$ nazywamy *normalnym ciągiem podziałów* odcinka $[a,b]$, jeśli

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.}$$

Można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 12.7. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną oraz niech $(\mathcal{P}_n)_{n>0}$ będzie dowolnym normalnym ciągiem podziałów odcinka $[a,b]$. Ponadto przez

$$s_n := s(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)} \cdot \Delta x_i^{(n)} \qquad \text{i} \qquad S_n := S(f,\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)} \cdot \Delta x_i^{(n)}$$

oznaczmy sumę dolną i odpowiednio sumę górną funkcji f względem podziału $\mathcal{P}_n$.

Wtedy ciągi $(s_n)_{n>0}$ i $(S_n)_{n>0}$ mają granice właściwe, tzn. istnieją takie liczby $s, S \in \mathbb{R}$, że

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n \qquad \text{i} \qquad S = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

i granice te nie zależą od wyboru normalnego ciągu podziałów $(\mathcal{P}_n)_{n>0}$.

Dowód: ☞ **R. Rudnicki, *„Wykłady z analizy matematycznej”***

Definicja 12.8. **[Całka dolna i górna Darboux]**
Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną oraz niech $(\mathcal{P}_n)_{n>0}$ będzie dowolnym normalnym ciągiem podziałów odcinka $[a,b]$.

- *Całką dolną Darboux funkcji f* w przedziale $[a,b]$ nazywamy granicę ciągu sum dolnych:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} m_i^{(n)} \cdot \Delta x_i^{(n)}.$$

- *Całką górną Darboux funkcji f* w przedziale $[a,b]$ nazywamy granicę ciągu sum górnych:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} M_i^{(n)} \cdot \Delta x_i^{(n)}.$$

Wprost z definicji sumy górnej i dolnej funkcji oraz z montoniczności granicy wynika

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Podobnie, jeśli ograniczone funkcje f i g spełniają na przedziale $[a,b]$ nierówność $f \leqslant g$, to zachowuje się ona dla ich całek Darboux.

Definicja 12.9. **[Całka Riemanna]**
Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną oraz niech $(\mathcal{P}_n)_{n>0}$ będzie dowolnym normalnym ciągiem podziałów odcinka $[a,b]$. Ponadto przez

$$\sigma_n := \sigma(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{X}_n)$$

oznaczmy sumę całkową funkcji f względem podziału $\mathcal{P}_n$ i odpowiadającemu mu układowi punktów pośrednich $\mathcal{X}_n$.

Funkcję f nazywamy *całkowalną w sensie Riemanna*, jeżeli dla **każdego** normalnego ciągu podziałów $(\mathcal{P}_n)_{n>0}$ odcinka $[a,b]$ i **niezależnie** od wyboru ciągu $(\mathcal{X}_n)_{n>0}$ układów punktów pośrednich ciąg $(\sigma_n)_{n>0}$ jest zbieżny i zawsze do tej samej granicy.

W tym przypadku *całką oznaczoną Riemanna funkcji f* w przedziale $[a,b]$ nazywamy jednoznacznie określoną granicę ciągu sum całkowych:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k_n} f\left(\xi_i^{(n)}\right) \cdot \Delta x_i^{(n)}.$$

Wskażemy teraz funkcję, która ma całkę oznaczoną i funkcję, która nie jest całkowalna.
Przykład: ☞ **Tylko na wykładzie!**

Można się domyślać, że sprawdzenie całkowalności dowolnej funkcji rzeczywistej wprost z definicji nie jest łatwe. Z tego powodu naturalne jest pytanie o w miarę łatwe w zastosowaniu kryteria, które pozwolą nam stwierdzić, czy dla danej funkcji istnieje całka oznaczona.

Twierdzenie 12.10. Funkcja ograniczona $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna wtedy i tylko wtedy, gdy jej całka dolna Darboux jest równa całce górnej.

Wtedy

$$m(b-a) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

gdzie $m = \inf\{f(x)\colon\ x \in [a,b]\}$ i $M = \sup\{f(x)\colon\ x \in [a,b]\}$.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Teraz udowodnimy lemat, który pomoże nam w dokładniejszym określeniu funkcji całkowalnych i własności całek oznaczonych.

Lemat 12.11. Niech $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Wtedy następujące warunki są równoważne:

❶ f jest całkowalna w sensie Riemanna.

❷ $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.

❸ Dla każdego normalnego ciągu $(\mathcal{P}_n)_{n>0}$ podziałów przedziału $[a,b]$ zachodzi

$$\lim_{n\to\infty} \Big(S(f,\mathcal{P}_n) - s(f,\mathcal{P}_n) \Big) = 0.$$

❹ Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje podział $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$, że

$$S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

12.3 Własności całki oznaczonej Riemanna

Określmy teraz podstawowe własności całki oznaczonej. Dla ułatwienia zapisu wprowadźmy następujące oznaczenie:

$$\mathcal{R}[a,b] := \Big\{ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}\colon\ f \text{ całkowalna w sensie Riemanna w przedziale } [a,b] \Big\}.$$

Przede wszystkim pokażemy, że całkowanie jest *operacją liniową*, a zbiór $\mathcal{R}[a,b]$ z naturalnymi działaniami dodawania funkcji i mnożenia przez skalar jest *przestrzenią wektorową* nad ciałem $\mathbb{R}$.

Twierdzenie 12.12. [**Liniowość całki Riemanna**]
Niech $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ i niech $\lambda \in \mathbb{R}$. Wtedy

❶ funkcja $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ oraz

$$\boxed{\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

❷ funkcja $\lambda \cdot f \in \mathcal{R}[a,b]$ oraz

$$\boxed{\int_a^b (\lambda\cdot f)(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Uzasadnienie: ☞ **Na wykładzie!**

Kolejne twierdzenie możemy opisać jako *addytywność całki względem przedziału całkowania.*

Twierdzenie 12.13. [**Addytywność całki względem przedziału całkowania**]
Funkcja $f \in \mathcal{R}[a,b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy jej zacieśnienia $f\big|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c]$ i $f\big|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c,b]$ dla dowolnego $c \in (a,b)$. Zachodzi przy tym warunek

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Dowód: ☞ **Literatura**, np. R. Rudnicki, *„Wykłady z analizy matematycznej"!*

Całkowanie jest także operacją *monotoniczną.*

Twierdzenie 12.14. [**Monotoniczność całki Riemanna**]
Niech $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ i niech $f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a,b]$. Wtedy

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Uzasadnienie: ☞ **Na wykładzie!**

Ponadto można udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 12.15. Niech funkcja $f \in \mathcal{R}[a,b]$ spełnia warunek

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \qquad \text{dla} \quad x \in [a,b],$$

gdzie $m < M$ są pewnymi liczbami rzeczywistymi.
Zdefiniujmy teraz funkcję $g = \varphi \circ f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $\varphi \in \mathcal{C}[m,M]$. Wówczas także $g \in \mathcal{R}[a,b]$.

Z powyższego twierdzenia dostajemy następujący wniosek.

Wniosek 12.16. Jeśli funkcje $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, to także

❶ funkcja $f \cdot g \in \mathcal{R}[a,b]$.

❷ funkcja $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ oraz

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.}$$

12.4 Klasa funkcji całkowalnych

Spróbujmy teraz konkretnie określić, które funkcje są z całą pewnością całkowalne w sensie Riemanna.

Twierdzenie 12.17. Każda funkcja ciągła w przedziale domkniętym jest całkowalna w sensie Riemanna w tym przedziale, tzn.

$$\mathcal{C}[a,b] \subseteq \mathcal{R}[a,b],$$

gdzie $a < b$.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Z powyższego twierdzenia wynika, że funkcja identycznościowa $f\colon [a,b] \ni x \mapsto x \in \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna w dowolnym przedziale $[a,b]$. Policzmy zatem jej całkę oznaczoną w tym przedziale. Jak wiemy, jeżeli funkcja jest całkowalna, to granica ciągu sum całkowych nie zależy od wyboru normalnego ciągu podziałów odcinka $[a,b]$ i ciągu układów punktów pośrednich. Wybierzmy zatem równomierne podziały $\mathcal{P}_n$ odcinka [a,b] punktami

$$x_i^{(n)} = a + i \cdot \frac{b-a}{n}, \qquad \text{gdzie} \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Taki ciąg podziałów $(\mathcal{P}_n)$ jest ciągiem normalnym, ponieważ średnica podziałów

$$\delta_n = \delta(\mathcal{P}_n) = \frac{b-a}{n} \longrightarrow 0 \qquad \text{przy} \quad n \to \infty.$$

Jako układ punktów pośrednich dla podziału $\mathcal{P}_n$ wybierzmy prawe końce przedziałów $\left[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}\right]$, tzn. $(\mathcal{X}_n)_n = \left(\xi_i^{(n)}\right)_n$, gdzie $\xi_i^{(n)} := x_i^{(n)}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, i utwórzmy ciąg sum całkowych

$$\sigma_n = \sigma(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{X}_n) = \sum_{i=1}^n f\left(\xi_i^{(n)}\right) \cdot \Delta x_i^{(n)} = \sum_{i=1}^n \xi_i^{(n)} \cdot \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \left(a + i \cdot \frac{b-a}{n}\right) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot na + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \cdot \sum_{i=1}^n i = ab - a^2 + \frac{(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

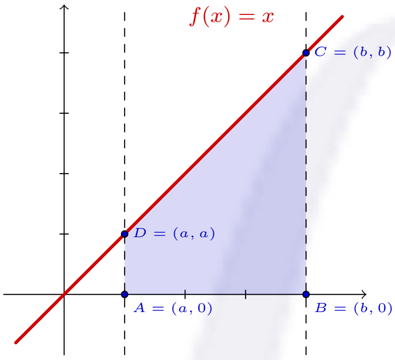
Wynika stąd, że

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = ab - a^2 + (b-a)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Ostatecznie otrzymujemy, że funkcja $f(x) = x$ jest całkowalna na przedziale $[a,b]$ i jej całka oznaczona w tym przedziale równa jest

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Zauważmy, że jest to pole obszaru (trapezu $ABCD$) ograniczonego wykresem funkcji f, osią odciętych oraz prostymi $x = a$ i $x = b$:



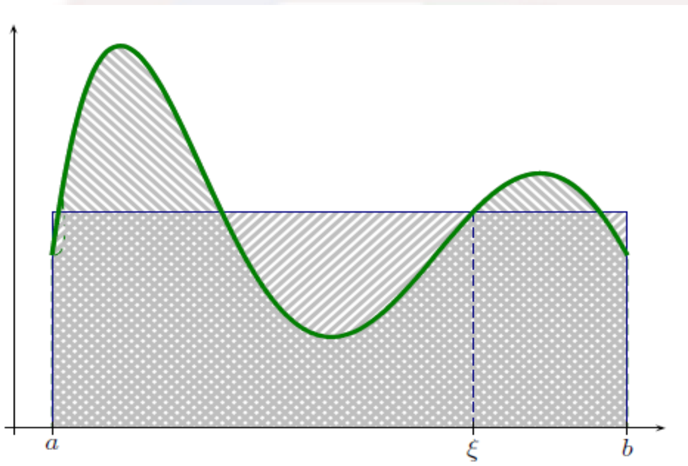
Dla funkcji ciągłych możemy udowodnić kolejne twierdzenie o wartości średniej, w pewnym sensie odpowiadające twierdzeniu Lagrange'a.

Twierdzenie 12.18. [**Twierdzenie o wartości średniej**]
Niech $f \in \mathcal{C}[a, b]$. Wtedy istnieje punkt $\xi \in [a, b]$, taki że

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(\xi)\cdot(b-a).}$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Powyższe twierdzenie oznacza, że pole obszaru ograniczonego wykresem funkcji ciągłej i przyjmującej tylko wartości nieujemne oraz osią odciętych, prostymi $x = a$ i $x = b$ jest równe polu pewnego prostokąta o bokach długości $b - a$ i $f(\xi)$.



Okazuje się, że inkluzja z twierdzenia 12.17 jest właściwa i nie tylko funkcje ciągłe są całkowalne.

Twierdzenie 12.19. Jeśli ograniczona funkcja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale $[a, b]$ z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów, to f jest całkowalna w sensie Riemanna w tym przedziale.

Wniosek 12.20. Niech funkcja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie taka, że $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in [a, b]$ z wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości punktów. Wówczas $f \in \mathcal{R}[a, b]$ oraz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; 0.$$

Wniosek 12.21. Niech $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Jeśli funkcja $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ spełnia warunek $f(x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in [a, b]$ z wyjątkiem co najwyżej skończonej ilości punktów, to $g \in \mathcal{R}[a, b]$ oraz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Powyższy wniosek pozwala nam rozszerzyć pojęcie funkcji całkowalnej w sensie Riemanna w przedziale $[a,b]$ na przypadek funkcji określonej w przedziale $[a,b]$ z wyjątkiem skończonej liczby punktów, przykładowo określonej w przedziale otwartym (a,b).
Mówimy, że funkcja $f\colon [a,b]\setminus\mathcal{N}\to\mathbb{R}$, gdzie $\#\mathcal{N}<\infty$, jest całkowalna w sensie Riemanna w przedziale $[a,b]$, gdy istnieje funkcja $g\in\mathcal{R}[a,b]$ taka, że $f\big|_{[a,b]\setminus\mathcal{N}} = g\big|_{[a,b]\setminus\mathcal{N}}$. Wtedy całką Riemanna funkcji f w przedziale $[a,b]$ nazywamy liczbę $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Ponadto prawdziwe jest także następujące twierdzenie.

Twierdzenie 12.22. Jeśli ograniczona funkcja $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ jest monotoniczna w przedziale $[a,b]$, to f jest całkowalna w sensie Riemanna w tym przedziale.

13 Związek między całką oznaczoną a nieoznaczoną

Jak już wspominaliśmy, obliczanie całki oznaczonej wprost z definicji jest bardzo trudne i pracochłonne. W tym rozdziale naszym celem będzie podanie twierdzenia, które stosujemy w praktyce i które bardzo ułatwia to zadanie.
Rozpoczniemy od następującej definicji.

Definicja 13.1. Niech $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna. Wtedy przyjmujemy, że

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; 0}$$

oraz

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Przedstawimy teraz podstawowe twierdzenie rachunku całkowego. Tak naprawdę bardziej adekwatna byłaby nazwa „podstawowe twierdzenie rachunku różniczkowego i całkowego”, ponieważ opisuje ono związek między tymi dwoma działami analizy matematycznej.
Jak pamiętamy, rachunek różniczkowy miał swój początek w rozważaniach dotyczących problemu opisania stycznych do krzywych (zob. str. 8), natomiast rachunek całkowy wywodzi się z prób opisu pól figur ograniczonych wykresami funkcji. Związek między tymi dwoma zagadnieniami został zauważony w XVII w., a szczegółowo opisany przez Newtona i Leibniza.

Twierdzenie 13.2. **[Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego]**
Niech $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna w przedziale $[a,b]$. Definiujemy funkcję

$$F\colon \begin{cases} [a,b] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

a) Wtedy funkcja F jest ciągła w przedziale $[a,b]$.

b) Jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie $x\in(a,b)$, to F jest różniczkowalna w x oraz $F'(x)=f(x)$.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Funkcję F zdefiniowaną w powyższym twierdzeniu nazywamy *funkcją górnej granicy całkowania*.
Jeśli funkcja $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ jest ciągła w przedziale $[a,b]$, to górna granica całkowania F jest funkcją pierwotną funkcji f w przedziale (a,b).
Oznacza to, że wreszcie pojawiło się uzasadnienie twierdzenia 10.6, w którym utrzymywaliśmy, że każda funkcja ciągła ma pierwotną, czyli jest pochodną pewnej funkcji!

Uwaga Niech $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Wówczas *funkcja dolnej granicy całkowania*

$$F\colon \begin{cases} [a,b] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \quad x & \longmapsto \quad \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

jest ciągła. Ponadto, jeśli funkcja f jest ciągła w punkcie $x \in (a,b)$, to funkcja F ma pochodną w tym punkcie oraz $F'(x) = -f(x)$.

Wynika to z faktu, że $F(x) = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (zob. twierdzenie 12.13).

Z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego wynika następujący fakt.

Wniosek 13.3. Niech $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Jeśli $f(x) \geqslant 0$ dla $x \in [a,b]$ oraz istnieje $x_0 \in [a,b]$ takie, że funkcja f jest ciągła w punkcie x_0 i $f(x_0) > 0$, to

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \ > \ 0.$$

Dowód: ☞ **Zadanie domowe!**

Ważnym i bezpośrednim wnioskiem z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego, a właściwie jego drugą częścią, jest tzw. wzór Newtona-Leibniza, który umożliwi nam stosunkowo łatwe obliczanie całek oznaczonych.

Wniosek 13.4. [**Wzór Newtona-Leibniza**]

- Każda funkcja ciągła $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ma pierwotną.
- Jeśli G jest pierwotną funkcji ciągłej $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, to

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \ = \ G(b) \ - \ G(a) \ =: \ G(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.}$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Przykłady 13.5.

❶ Obliczamy całkę

$$\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x.$$

Pierwotną x^2 jest $\frac{1}{3} \cdot x^3$. Zgodnie z wzorem Newtona-Leibniza mamy

$$\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x \ = \ \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_{x=0}^{x=2} \ = \ \frac{1}{3} \cdot 2^3 \ - \ \frac{1}{3} \cdot 0^3 \ = \ \frac{8}{3}.$$

❷ Obliczamy całkę

$$\int_1^2 \big(x^4 - 3x^2 + 4x - 2\big)\mathrm{d}x.$$

Pierwotną funkcji podcałkowej jest

$$F(x) \ = \ \frac{1}{5}\,x^5 \ - \ 3 \cdot \frac{1}{3}\,x^3 \ + \ 4 \cdot \frac{1}{2}\,x^2 - 2x.$$

Skąd

$$\begin{aligned} \int_1^2 \big(x^4 - 3x^2 + 4x - 2\big)\,\mathrm{d}x \ &= \ \left[\frac{1}{5}\,x^5 \ - \ x^3 \ + \ 2x^2 - 2x\right]\Bigg|_{x=1}^{x=2} \ = \\ &= \ \left(\frac{1}{5} \cdot 32 - 8 + 8 - 4\right) \ - \ \left(\frac{1}{5} - 1 + 2 - 2\right) = \\ &= \ \frac{12}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) \ = \ \frac{16}{5}. \end{aligned}$$

❸ ☞ **Kolejne przykłady** zostaną podane na wykładzie.

Z wniosku 13.4 oraz z twierdzeń o całkowaniu przez części (zob. tw. 11.4) i przez podstawienie (zob. tw. 11.6) wynikają następujące twierdzenia.

Twierdzenie 13.6. [**o całkowaniu przez części**]
Niech I będzie przedziałem otwartym oraz niech $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy $\mathcal{C}^1$. Wtedy

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x}$$

dla dowolnych $a, b \in I$.

Uzasadnienie: ☞ **Na wykładzie!**

Twierdzenie 13.7. [**o całkowaniu przez podstawienie**]
Niech I i J będą przedziałami otwartymi oraz niech $f\colon I \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, a $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ funkcją różniczkowalną w sposób ciągły i spełniającą warunek $\varphi(J) \subset I$. Wtedy

$$\boxed{\int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy}$$

dla dowolnych $a, b \in J$.

Uzasadnienie: ☞ **Na wykładzie!**

Założenia w powyższych twierdzeniach mogą być osłabione!

Przykłady 13.8. ☞ **Na wykładzie!**

14 Całki niewłaściwe

Jak pamiętamy całkę Riemanna definiowaliśmy dla funkcji ograniczonych i określonych w przedziałach domkniętych.
Teraz rozszerzymy tę definicję na przypadki, w których albo funkcja albo obszar całkowania będzie nieograniczony i takie całki określimy wspólnym mianem *całek niewłaściwych*. Całki niewłaściwe będziemy oznaczać takim samym symbolem, jak całki właściwe Riemanna.

14.1 Nieograniczony przedział całkowania

Nieograniczony obszar całkowania oznacza, że przynajmniej jedna z granic całkowania jest nieskończonością.

Definicja 14.1. [**Całka niewłaściwa po przedziale nieograniczonym**]

a) Niech $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na każdym przedziale postaci $[a,b]$, gdzie $b \in (a,\infty)$. Jeśli istnieje granica właściwa

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

to tę granicę nazywamy *całką niewłaściwą* funkcji f w przedziale $[a,\infty)$ i oznaczamy symbolem

$$\boxed{\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

Mówimy wówczas, że całka niewłaściwa jest zbieżna. W przeciwnym przypadku mówimy, że całka niewłaściwa $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ jest *rozbieżna* i nie przyporządkowujemy jej żadnej wartości.

b) Niech $f\colon (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną na każdym przedziale postaci $[a, b]$, gdzie $a \in (-\infty, b)$. Jeśli istnieje granica właściwa
$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
to tę granicę nazywamy *całką niewłaściwą* funkcji f w przedziale $(-\infty, b]$ i oznaczamy symbolem
$$\boxed{\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$
Mówimy wówczas, że całka niewłaściwa jest zbieżna. W przeciwnym przypadku mówimy, że całka niewłaściwa $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest *rozbieżna* i nie przyporządkowujemy jej żadnej wartości.

Z liniowości całki Riemanna i z liniowości granicy dostajemy natychmiast liniowość całek niewłaściwych, oczywiście przy założeniu ich zbieżności.
☞ **Zadanie domowe:** Sformułować odpowiednie twierdzenie!

Zauważmy ponadto, że jeśli zbieżna jest całka $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$, to dla każdej liczby $c > a$ zbieżna jest także całka $\int\limits_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ i prawdziwa jest równość
$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Jest to prosty wniosek z definicji całki niewłaściwej i addytywności całki oznaczonej względem przedziału całkowania.
Analogiczna uwaga obowiązuje dla całek postaci $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Przykłady 14.2. Niech $b > 1$.

❶ Wtedy
$$\int_1^b \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{-2+1}\cdot x^{-2+1}\Big|_1^b \;=\; -\frac{1}{x}\Big|_1^b \;=\; -\frac{1}{b}+1 \;=\; 1-\frac{1}{b}.$$
Granica $\lim\limits_{b\to\infty} \frac{1}{b} = 0$, zatem całka niewłaściwa $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna, przy czym
$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right) \;=\; 1.$$

❷ Natomiast
$$\int\limits_1^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \;=\; \ln x\Big|_1^b \;=\; \ln b \;-\; \ln 1 \;=\; \ln b.$$
Całka niewłaściwa $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ jest zatem rozbieżna, ponieważ $\lim\limits_{b\to\infty} \ln b = \infty$.

Uogólnienie i kolejne przykłady: ☞ **Na wykładzie!**

Definicja 14.3. Niech f będzie funkcją określoną w zbiorze liczb rzeczywistych. Jeśli istnieje $c \in \mathbb{R}$ takie, że całki $\int\limits_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x$ i $\int\limits_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ są zbieżne, to określamy całkę niewłaściwą Riemanna funkcji f w $\mathbb{R}$ jako sumę
$$\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int\limits_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \int\limits_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$
i mówimy, że całka ta jest zbieżna.
Jeśli całka $\int\limits_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x$ lub $\int\limits_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ jest rozbieżna, to całkę $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ nazywamy rozbieżną.

Twierdzenie 14.4. Niech f będzie funkcją określoną w zbiorze liczb rzeczywistych. Wówczas całka $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $c \in \mathbb{R}$ zbieżne są całki $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x$ i $\int\limits_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dowód: ☞ **Zadanie domowe!**

Dla całek niewłaściwych, podobnie jak dla szeregów liczbowych, możemy wprowadzić pojęcie zbieżności bezwzględnej i warunkowej. Przykładowo, jeśli zbieżna jest całka $\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x$, to mówimy, że całka $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jest *bezwzględnie zbieżna*, a funkcja f jest *bezwzględnie całkowalna* na $[a,+\infty)$.

Jeśli całka $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna lecz nie jest zbieżna bezwzględnie, to mówimy, że całka ta jest *warunkowo zbieżna*, a funkcja f jest *warunkowo całkowalna* na $[a,+\infty)$.

Standardowym przykładem całki warunkowo zbieżnej, tzn. zbieżnej, ale nie bezwzględnie zbieżnej, jest tak zwana *całka Dirichleta*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

gdzie funkcja podcałkowa

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{dla} \quad x = 0 \end{cases}$$

jest ciągła na przedziale $[0,+\infty)$, a zatem jest też całkowalna w sensie Riemanna na każdym przedziale postaci $[0,b]$.

Można także pokazać, że wartość całki Dirichleta to $\frac{\pi}{2}$.

Kolejną analogię do teorii szeregów liczbowych stanowi następujące twierdzenie będące w szczególności odpowiednikiem kryteriów porównawczych.

Twierdzenie 14.5. Niech $f, g\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna na każdym przedziale postaci $[a,b]$, gdzie $b \in (a,\infty)$.

❶ Jeśli całka $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jest bezwzględnie zbieżna, to jest zbieżna oraz

$$\left|\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

❷ Jeśli $|f(x)| \leqslant g(x)$ dla $x \in [a,\infty)$ oraz całka $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna, to całka $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jest bezwzględnie zbieżna i

$$\int\limits_{a}^{\infty} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

❸ Jeśli $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ dla $x \in [a,\infty)$ oraz całka $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jest rozbieżna, to całka $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ też jest rozbieżna.

❹ Jeśli f i g są dodatnie na $[a,\infty)$ i

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0,+\infty),$$

to całka $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka $\int\limits_{a}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$.

Okazuje się, że dla całek niewłaściwych można także udowodnić odpowiedniki kryteriów Dirichleta i Abela (☞ **Podręcznik!**).

Analogiczne twierdzenia, z odpowiednimi modyfikacjami, zachodzą również dla funkcji $f, g\colon (-\infty,b] \to \mathbb{R}$ całkowalnych w sensie Riemanna na każdym przedziale postaci $[a,b]$, gdzie $a \in (-\infty,b)$.

Okazuje się, że zbieżność całek niewłaściwych z funkcji nieujemnych można powiązać ze zbieżnością odpowiednich szeregów liczbowych. Kolejne twierdzenie zwane całkowym kryterium zbieżności szeregów liczbowych można traktować także jako kryterium zbieżności dla całek niewłaściwych.

Twierdzenie 14.6. [**Kryterium całkowe zbieżności szeregów**]
Niech $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$, gdzie $a \geqslant 0$, będzie funkcją nieujemną i nierosnącą.
Wówczas szereg $\sum\limits_{n=[a+1]}^{\infty} f(n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka $\int\limits_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

14.2 Nieograniczona funkcja podcałkowa

O całkach niewłaściwych mówimy także w przypadku, gdy funkcja $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ jest ciągła (lub odpowiednio ograniczona i całkowalna w sensie Riemanna) na każdym przedziale $[a,\, b-\varepsilon]$, gdzie $0 < \varepsilon < b-a$, ale nie można jej przedłużyć do funkcji ciagłej (odpowiednio: ograniczonej i całkowalnej w sensie Riemanna) na $[a,b]$. Z sytuacją taką mamy do czynienia, gdy np. funkcja f ma w punkcie b granicę niewłaściwą lub w ogóle nie ma granicy w punkcie b, ani nie jest ograniczona w żadnym lewostronnym sąsiedztwie tego punktu.
Analogicznie możemy rozpatrywać przypadek funkcji $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$.

Definicja takich całek niewłaściwych powinna zachowywać własność addytywności ze względu na przedział całkowania, co pozwoli rozpatrywać funkcje określone na przedziale $[a,b]$ poza skończoną liczbą punktów, w sąsiedztwie których funkcja ta jest nieograniczona.

Definicja 14.7. [**Całka niewłaściwa z funkcji nieograniczonej**]

a) Niech funkcja $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ będzie nieograniczona w każdym sąsiedztwie punktu b i całkowalna w każdym przedziale $[a,\, b-\varepsilon]$, gdzie $0 < \varepsilon < b-a$. Jeśli istnieje granica właściwa

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* funkcji f w przedziale $[a,b)$ oraz

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Mówimy wówczas, że całka niewłaściwa jest zbieżna. W przeciwnym przypadku nazywamy całkę niewłaściwą $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *rozbieżną* i nie przyporządkowujemy jej żadnej wartości.

b) Niech funkcja $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$ będzie nieograniczona w każdym sąsiedztwie punktu a i całkowalna w każdym przedziale $[a+\varepsilon,\, b]$, gdzie $0 < \varepsilon < b-a$. Jeśli istnieje granica właściwa

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

to nazywamy ją *całką niewłaściwą* funkcji f w przedziale $(a,b]$ oraz

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;:=\; \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Mówimy wówczas, że całka niewłaściwa jest zbieżna. W przeciwnym przypadku nazywamy całkę niewłaściwą $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *rozbieżną* i nie przyporządkowujemy jej żadnej wartości.

Podobnie jak w poprzednim podrozdziale, z liniowości całki Riemanna i z liniowości granicy dostajemy natychmiast liniowość całek niewłaściwych, oczywiście przy założeniu ich zbieżności.

Zauważmy ponadto, że jeśli dla funkcji $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ zbieżna jest całka niewłaściwa $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, to dla każdej liczby $c \in (a,b)$ zbieżna jest także całka $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ i prawdziwa jest równość

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jest to prosty wniosek z definicji całki niewłaściwej i addytywności całki oznaczonej względem zbioru całkowania. Analogiczna uwaga obowiązuje dla całek niewłaściwych z funkcji $f\colon (a,b] \to \mathbb{R}$.

Przykłady 14.8. Niech $\varepsilon > 0$.

❶ Rozważmy funkcję $f\colon (0,1] \ni x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\,\Big|_\varepsilon^1 = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\varepsilon} = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

oraz

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(2 - 2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2.$$

Wynika stąd zbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, przy czym

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x := 2.$$

❷ Rozważmy teraz funkcję $f\colon (0,1] \ni x \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$. Wtedy

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\,\Big|_\varepsilon^1 = \ln 1 - \ln\varepsilon = -\ln\varepsilon.$$

Ale $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} (-\ln\varepsilon) = \infty$, zatem całka niewłaściwa $\int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ jest rozbieżna.

Uogólnienie: ☞ **Na wykładzie!**

Definicja 14.9. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nieograniczoną w każdym sąsiedztwie punktu b i w każdym sąsiedztwie punktu a. Jeśli istnieje $c \in (a,b)$ takie, że całki $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ i $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ są zbieżne odpowiednio w przedziałach $(a,c]$ i $[c,b)$, to określamy całkę niewłaściwą Riemanna funkcji f w (a,b) jako

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

i mówimy, że całka ta jest zbieżna.

Jeśli całka $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ lub $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest rozbieżna, to całkę $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazywamy rozbieżną.

Twierdzenie 14.10. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nieograniczoną w każdym sąsiedztwie punktu b i w każdym sąsiedztwie punktu a. Wówczas całka $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $c \in \mathbb{R}$ zbieżne są całki $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ i $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dowód: ☞ **Zadanie domowe!**

Definicja 14.11. Niech funkcja $f\colon [a,c)\cup(c,b] \to \mathbb{R}$ będzie nieograniczona w każdym sąsiedztwie (prawo- i lewostronnym) punktu c. Jeśli całki $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ i $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ są zbieżne odpowiednio w przedziałach $[a,c)$ i $(c,b]$, to określamy całkę niewłaściwą Riemanna funkcji f w $[a,b]$ jako sumę

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

i mówimy, że całka ta jest zbieżna.

Jeśli całka $\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ lub $\int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest rozbieżna, to całkę $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazywamy rozbieżną.

Powyższą definicję można uogólnić na przypadek funkcji określonej i ograniczonej na przedziale domkniętym za wyjątkiem skończonej liczby punktów.

Analogicznie jak w pierwszym przypadku dla całek niewłaściwych z funkcji nieograniczonych również możemy wprowadzić pojęcie zbieżności bezwzględnej i warunkowej. Ponadto można udowodnić następujące kryteria zbieżności, dzięki którym możemy stwierdzić zbieżność całki w przypadku, gdy skorzystanie z definicji nie jest łatwe lub wręcz nie jest możliwe.

Twierdzenie 14.12. Niech $f,g\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ będą funkcjami nieograniczonymi w każdym sąsiedztwie punktu b i całkowalnymi w każdym przedziale $[a,\, b-\varepsilon]$, gdzie $0<\varepsilon<b-a$.

❶ Jeśli całka $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest bezwzględnie zbieżna, to jest zbieżna oraz

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

❷ Jeśli $|f(x)| \leqslant g(x)$ dla $x\in[a,b)$ oraz całka $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna, to całka $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest bezwzględnie zbieżna i

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

❸ Jeśli $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ dla $x\in[a,b)$ oraz całka $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest rozbieżna, to całka $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ też jest rozbieżna.

❹ Jeśli f i g są dodatnie na $[a,b)$ i

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = k\in(0,+\infty),$$

to całka $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżna jest całka $\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Analogiczne twierdzenie zachodzi oczywiście dla funkcji $f,g\colon (a,b]\to\mathbb{R}$ nieograniczonych w każdym sąsiedztwie punktu a.

Całki mogą być niewłaściwe nie tylko z jednego powodu. Wyjaśnimy to na przykładzie. Funkcja podcałkowa w całce $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ jest nieograniczona w otoczeniu zera oraz zbiór całkowania jest przedziałem nieograniczonym. W tym przypadku mówimy, że całka niewłaściwa jest zbieżna, jeśli dla pewnej liczby $c>0$ **obie** całki $\int\limits_0^c \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ i $\int\limits_c^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ są zbieżne. Można udowodnić, że jeśli dla pewnego $c\in(0,+\infty)$ obie całki są zbieżne, to są zbieżne dla wszystkich liczb $c\in(0,+\infty)$. Aby pokazać rozbieżność całki niewłaściwej $\int\limits_0^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ wystarczy zatem wskazać takie c, dla którego przynajmniej jedna z całek: $\int\limits_0^c \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ lub $\int\limits_c^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ jest rozbieżna.

Przykład 14.13. Pokażemy, że całka niewłaściwa

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

jest rozbieżna.
Niech $c = 1$ i niech $\varepsilon > 0$. Wtedy

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \;=\; -\frac{1}{x}\bigg|_\varepsilon^1 \;=\; \frac{1}{\varepsilon} - 1 \;\xrightarrow{\varepsilon\to 0^+}\; \infty,$$

wynika stąd, że całka $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ jest rozbieżna, a zatem rozbieżna jest także całka $\int_0^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Uogólnienie: ☞ **Na wykładzie!**

15 Zastosowania geometryczne całek oznaczonych

Całka oznaczona ma wiele zastosowań. Z naszego punktu widzenia najważniejsze będą zastosowania geometryczne. W tym rozdziale opiszemy między między, jak używamy całki do obliczania pól figur płaskich, objętości figur przestrzennych i długości krzywych. Będziemy raczej polegać na naszej intuicji, jeśli chodzi o definicję przykładowo pola figury płaskiej lub objętości bryły przestrzennej, niż wprowadzać precyzyjne definicje, a następnie szczegółowe dowody zaprezentowanych twierdzeń. Bardziej natomiast będzie nam zależało na poprawnym zastosowaniu podanych wzorów.
Jednak do tematu powrócimy na wykładzie z *Analizy Matematycznej 2* i *3*. Ponadto będzie on poruszany na wykładzie z *Rachunku Prawdopodobieństwa* i na wykładzie z *Analizy Matematycznej* na II stopniu studiów. Osoby zainteresowane zachęcam także do udziału w wykładzie *Teoria Miary*.

15.1 Pole figury płaskiej

Nasze rozważania rozpoczniemy od pojęcia miary Jordana, która jest formalizacją pojęcia rozmiaru, czyli np. długości, pola figury płaskiej, objętości bryły, znanego z geometrii elementarnej.

Niech $D \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem ograniczonym. Z definicji oznacza to, że istnieje kwadrat Q zawierający zbiór D. Podzielmy teraz kwadrat Q na skończoną liczbę prostokątów domkniętych $\mathcal{P} = (P_i)_{i=1,\ldots,n}$ o rozłącznych wnętrzach, tzn.

$$\operatorname{int} P_i \cap \operatorname{int} P_j \ = \ \emptyset \qquad \text{dla} \quad i \neq j.$$

Oznaczmy teraz przez $\mathcal{P}_S$ sumę tych wszystkich prostokątów z rodziny $\mathcal{P}$, które mają część wspólną z D:

$$\mathcal{P}_S \ := \ \bigcup_{i=z_1}^{z_k} P_i \ \supseteq \ D,$$

gdzie $D \cap P_i \neq \emptyset$ dla $i = z_1, \ldots, z_k$.

Miarą Jordana zbioru $\mathcal{P}_S$ nazywamy sumę $|\mathcal{P}_S| := \sum\limits_{i=z_1}^{z_k} |P_i|$, gdzie przez miarę prostokąta $P_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ rozumiemy jego pole, czyli $|P_i| := (b_i - a_i) \cdot (d_i - c_i)$.

Miarą zewnetrzną Jordana zbioru D nazywamy liczbę

$$m_z(D) \ := \ \inf_{\mathcal{P}_S \supseteq D} |\mathcal{P}_S|.$$

Natomiast przez $\mathcal{P}_s$ oznaczmy sumę tych wszystkich prostokątów, które zawierają się w D:

$$\mathcal{P}_s \ := \ \bigcup_{i=w_1}^{w_k} P_i \ \subseteq D\,,$$

gdzie $P_i \subseteq D$ dla $i = w_1, \ldots, w_k$. Jak wyżej $|\mathcal{P}_s| := \sum\limits_{i=w_1}^{w_k} |P_i|$.

Miarą wewnetrzną Jordana zbioru D nazywamy liczbę

$$m_w(D) \ := \ \sup_{\mathcal{P}_s \subseteq D} |\mathcal{P}_s|.$$

Jeżeli $m_z(D) = m_w(D)$, to zbiór D nazywamy *mierzalnym w sensie Jordana*, a liczbę $|D| := m_z(D) = m_w(D)$ nazywamy *miarą Jordana zbioru D* lub *polem zbioru D*.

Podobnie definiujemy miarę Jordana bryły przestrzennej, czyli jej objętość, zastępując prostokąty prostopadłościanami.

Wprost z twierdzenia 12.10 otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 15.1. Niech $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją całkowalną. Wówczas zbiór

$$D \ := \ \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \text{i} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\Big\}$$

jest mierzalny w sensie Jordana oraz

$$|D| \ = \ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jeśli natomiast $f(x) \leqslant 0$ dla $x \in [a,b]$, to zbiór

$$\widetilde{D} := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \text{i} \quad f(x) \leqslant y \leqslant 0\Big\}$$

jest również mierzalny w sensie Jordana oraz

$$|\widetilde{D}| = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ogólnie, jeśli f jest dowolną funkcją całkowalną (czyli przymuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne, to zbiór

$$\widehat{D} := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \text{i} \quad 0 \leqslant y \leqslant |f(x)|\Big\}$$

jest mierzalny w sensie Jordana oraz

$$|\widehat{D}| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Powyższy wniosek można łatwo uogólnić.

Wniosek 15.2. Niech $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ będą funkcją całkowalnymi i takimi, że $g(x) \leqslant f(x)$ dla $x \in [a,b]$. Wówczas zbiór

$$D := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \text{i} \quad g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\Big\}$$

jest mierzalny w sensie Jordana oraz

$$|D| = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Zauważmy, że analogiczne wzory na pole możemy sformułować także dla zbiorów D ograniczonych wykresami funkcji zmiennej y oraz prostymi $y = c$ i $y = d$.

Przykład 15.3. ☞ **Na wykładzie!**

15.2 Długość krzywej

Krzywa jest jednym z najważniejszych pojęć matematyki, w szczególności takich jej działów jak geometria, geometria różniczkowa czy geometria algebraiczna. Jest też jednym z niewielu pojęć matematycznych, które weszły do języka potocznego. Intuicyjnie przez krzywą rozumiemy jednowymiarowy podzbiór pewnej przestrzeni. Jednak mimo pozornej prostoty trudno jest podać uniwersalną definicję krzywej. W zależności od dziedziny i interesujących nas własności stosujemy różne definicje i opisy krzywych. Krzywą bardzo często będziemy interpretować jako trajektorię ruchu punktu materialnego, czyli krzywą jaką zakreśla w pewnej przestrzeni poruszający się punkt. Wyznacza ona zależność między czasem t a położeniem punktu.
Dokładniej pojęcie krzywej będziemy omawiać na wykładzie *Analiza Matematyczna 3*. Teraz zadowolimy się intuicyjnym rozumieniem krzywej, paroma prostymi definicjami i umiejętnością obliczania długości łuku krzywej przy pomocy całki oznaczonej. Jednak osoby zainteresowane zachęcam do dokładniejszego zapoznania się z tym podrozdziałem, ponieważ dysponują już Państwo warsztatem pozwalającym na zrozumienie tego materiału.

15.2.1 Definicja krzywej

Definicja 15.4. Niech $I \subseteq \mathbb{R}$ będzie dowolnym przedziałem. Funkcję $\boldsymbol{r}\colon I \to \mathbb{R}^n$ nazywamy *funkcją wektorową* jednej zmiennej.

Wartości funkcji wektorowej można interpretować jako końce wektora zaczepionego w początku układu współrzędnych, tzw. *wektora wodzącego*.

Uwaga
Funkcję wektorową $\boldsymbol{r}\colon I \to \mathbb{R}^2$ będziemy zapisywali w postaci

$$\boldsymbol{r}(t) = [x(t),\, y(t)] \qquad \text{lub} \qquad \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}, \qquad \text{gdzie} \quad t \in I.$$

a $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ są wektorami bazowymi w $\mathbb{R}^2$.

Funkcję wektorową $\boldsymbol{r}\colon I \to \mathbb{R}^3$ będziemy zapisywali w postaci

$$\boldsymbol{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)] \quad \text{lub} \quad \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}, \quad \text{gdzie} \quad t \in I.$$

a $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ są wektorami bazowymi w $\mathbb{R}^3$.

Funkcję wektorową $\boldsymbol{r}\colon I \to \mathbb{R}^n$ nazywamy *różnowartościową* na przedziale I, jeśli zachodzi warunek

$$t_1 \neq t_2 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{r}(t_1) \neq \boldsymbol{r}(t_2)$$

dla wszystkich $t_1, t_2 \in I$.

Jeżeli każdy punkt $t \in I$ ma otoczenie, w którym r jest różnowartościowa, to mówimy, że funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}$ jest *lokalnie różnowartościowa*.

Funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}\colon I \to \mathbb{R}^n$ jest *ciągła* (*różniczkowalna*) na przedziale $I_0 \subseteq I$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda z jej współrzędnych jest *ciągła* (*różniczkowalna*) na tym przedziale.
W przypadku $n = 2$ lub odpowiednio $n = 3$ pochodna funkcji wektorowej $\boldsymbol{r}$ dana jest wzorem

$$\boldsymbol{r}'(t) = [x'(t), y'(t)] \quad \text{lub odpowiednio} \quad \boldsymbol{r}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]$$

dla $t \in I_0$.

Definicja 15.5. Funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}\colon I \to \mathbb{R}^n$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ na przedziale $I_0 \subseteq I$, jeżeli posiada ciągłe pochodne do rzędu k włącznie w każdym punkcie zbioru I_0.

Twierdzenie 15.6. Funkcja wektorowa $\boldsymbol{r}\colon I \to \mathbb{R}^n$ jest klasy $\mathcal{C}^k$ na przedziale $I_0 \subseteq I$ wtedy i tylko wtedy, gdy jej wszystkie współrzędne są klasy $\mathcal{C}^k$ na przedziale I_0.

Definicja 15.7. *Krzywą* γ w przestrzeni $\mathbb{R}^n$, gdzie $n > 1$, nazywamy obraz przedziału I (otwartego lub domkniętego, ograniczonego lub nie), tzn. $\gamma = \boldsymbol{r}(I)$, gdzie $\boldsymbol{r}\colon I \to \mathbb{R}^n$ jest ciągłą i lokalnie różnowartościową funkcją wektorową.
Jeżeli funkcja $\boldsymbol{r}$ jest różnowartościowa na całym przedziale I, to krzywą nazywamy *łukiem*.
Funkcję wektorową $\boldsymbol{r}$, której obrazem jest krzywa, nazywamy *parametryzacją (opisem parametrycznym)* krzywej.

W przypadku $n = 2$ lub odpowiednio $n = 3$ często stosujemy zapis:

$$\gamma\colon \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I, \qquad \text{odpowiednio} \qquad \gamma\colon \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in I,$$

Powyższe równania nazywamy *równaniami parametrycznymi krzywej* w $\mathbb{R}^2$, odpowiednio w $\mathbb{R}^3$, a t nazywamy *parametrem*.

Uwaga. W dalszej części, o ile nie będzie to prowadziło do nieporozumień, będziemy utożsamiać krzywą γ i jej parametryzację $\boldsymbol{r}$, określając je wspólnym terminem ***krzywa*** i oznaczając wspólnym symbolem γ, tzn. $\gamma \stackrel{ozn.}{=} \gamma(I)$.

Parametryzacja krzywej nie jest określona w sposób jednoznaczny! Przykładowo, opisem parametrycznym górnego półokręgu jednostkowego są funkcje wektorowe $\gamma_1(t) = [\cos t, \sin t]$, gdzie $t \in [0, \pi]$, i $\gamma_2(t) = [\sin 2t, \cos 2t]$, gdzie $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Jeśli będziemy interpretować ten półokrąg jako trajektorię ruchu punktu materialnego, to w pierwszym przypadku punkt porusza się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara ($x_1'(t) < 0$), a w drugim przypadku zgodnie z ruchem wskaówek ($x_2'(t) > 0$) i na dodatek dwa razy szybciej.

Definicja 15.8. Jeśli krzywa γ jest obrazem przedziału domkniętego, czyli $\gamma = \gamma([a, b])$, gdzie $a < b$, to krzywą nazywamy *krzywą Jordana*, a punkty $\gamma(a)$ i $\gamma(b)$ nazywamy odpowiednio początkiem i końcem krzywej γ.

Definicja 15.9. *Łuk zwykły* to krzywa Jordana bez punktów wielokrotnych, czyli jej parametryzacja jest funkcją różnowartościową.

Definicja 15.10. *Krzywa zamknięta* to krzywa Jordana, której początek pokrywa się z końcem, czyli $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Definicja 15.11. Łuk zwykły klasy $\mathcal{C}^1$, którego parametryzacja spełnia warunek

$$\gamma'(t) \neq \mathbf{0} \quad \text{dla} \quad t \in (a, b),$$

nazywamy *łukiem gładkim*.

Łuk gładki nie ma zatem punktów wielokrotnych i w każdym jego punkcie istnieje styczna, która zmienia się w sposób ciągły przy zmianie punktu styczności. Zwrot wektora stycznego $\gamma'(t)$ jest zgodny z kierunkiem wzrostu parametru t.

Definicja 15.12. Punkt, w którym pochodna

$$\gamma'(t) = \mathbf{0}$$

lub nie istnieje, nazywamy *punktem osobliwym* krzywej o parametryzacji γ.

Definicja 15.13. O krzywej, którą można podzielić na skończoną liczbę łuków gładkich, mówimy, że jest *kawałkami gładka (regularna)*.
Punkty złączenia łuków gładkich nazywamy *wierzchołkami* krzywej regularnej.

15.2.2 Krzywe na płaszczyźnie

Definicja 15.14. *Krzywą płaską* nazywamy krzywą, której wszystkie punkty należą do pewnej płaszczyzny.

Każda krzywa płaska jest szczególnym przypadkiem krzywej przestrzennej. Krzywe płaskie opisuje się w przestrzeni dwuwymiarowej, którą jest zawierająca je płaszczyzna. Dzięki czemu wzory obliczeniowe zostają istotnie uproszczone.
My będziemy najczęściej zakładać, że zawierająca krzywą płaszczyzna jest płaszczyzną Oxy.

Jeżeli możliwe jest przekształcenie równań parametrycznych krzywej do postaci

$$y = f(x) \qquad \text{lub} \qquad x = g(y),$$

to będziemy ją nazywać *postacią jawną* krzywej.

Jeżeli krzywą można opisać równaniem

$$F(x, y) = 0,$$

to postać tę nazywamy *postacią uwikłaną* krzywej.

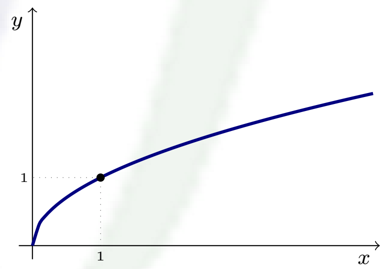
Przykład 15.15. Krzywa o parametryzacji $\gamma\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, gdzie

$$\gamma(t) = [t, \sqrt{t}], \qquad t \in (0, +\infty),$$

ma też inny, równoważny, opis parametryczny $\tilde{\gamma}\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, gdzie

$$\tilde{\gamma}(t) = \left[t^2, t\right], \qquad t \in (0, +\infty).$$

Krzywa ta (jedna gałąź paraboli) jest wykresem funkcji $y = f(x) = \sqrt{x}$, $x \in (0, +\infty)$, lub funkcji $x = g(y) = y^2$, $y \in (0, +\infty)$.



Wzory definiujące funkcje f i g są postacią jawną krzywej będącej ich wykresem.
Natomiast jej postacią uwikłaną jest równanie

$$\sqrt{x} - y = 0 \qquad \text{lub} \qquad x - y^2 = 0.$$

Krzywe stożkowe

Stożkowymi nazywamy krzywe, jakie można otrzymać przecinając stożek płaszczyznami nieprzechodzącymi przez wierzchołek stożka. W zależności od kąta jaki tworzy oś stożka z płaszczyzną tnącą uzyskamy okrąg, elipsę, hiperbolę lub parabolę. Krzywe stożkowe są przykładami tzw. *krzywych algebraicznych drugiego stopnia*, ponieważ można je w kartezjańskim układzie współrzędnych opisać równaniem algebraicznym drugiego stopnia względem obu zmiennych x i y.

Stożkowe są krzywymi płaskimi, zawierają się bowiem w płaszczyznach tnących. Podamy teraz inne definicje tych krzywych, zakładając, że są one podzbiorami płaszczyzny Oxy.

Definicja 15.16. *Okręgiem* o środku w punkcie O i promieniu $r \in (0, +\infty)$ nazywamy zbiór punktów P spełniających warunek

$$|OP| = r,$$

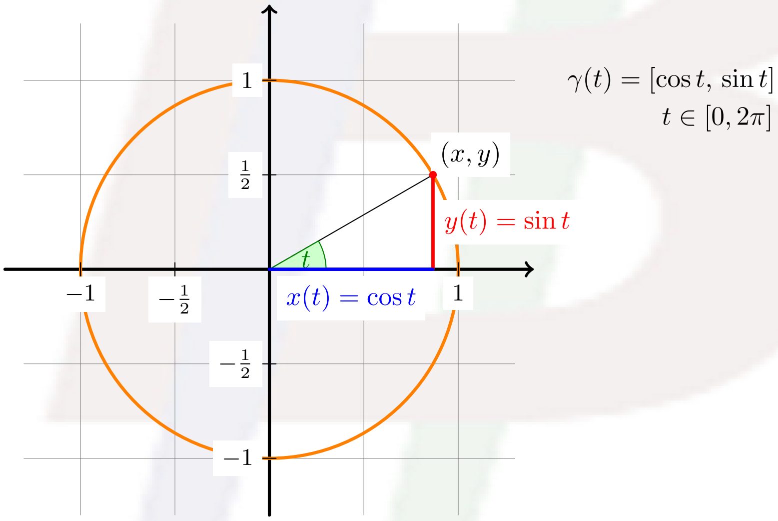
czyli odległych od środka o r.

Jeśli $O = (a, b)$ i $P = (x, y)$, to

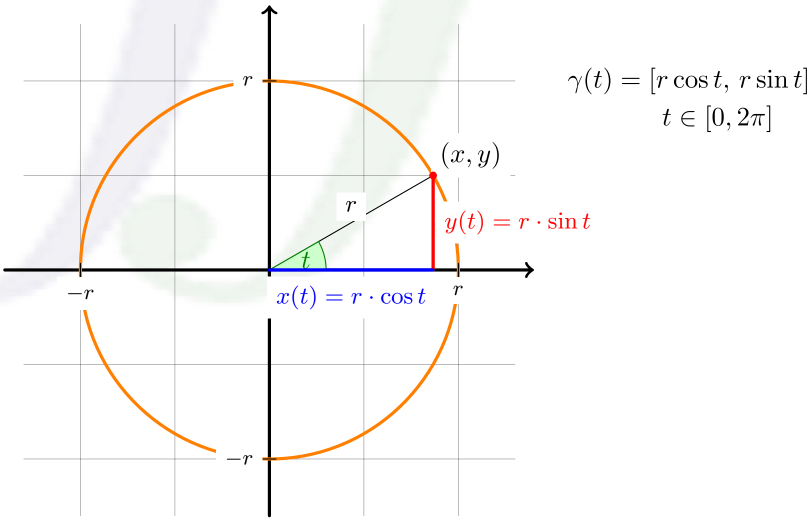
$$\boxed{S(O, r) := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\right\}.}$$

Równanie $(x-a)^2 + (y-b)^2 - r^2 = 0$ jest zatem postacią uwikłaną okręgu.

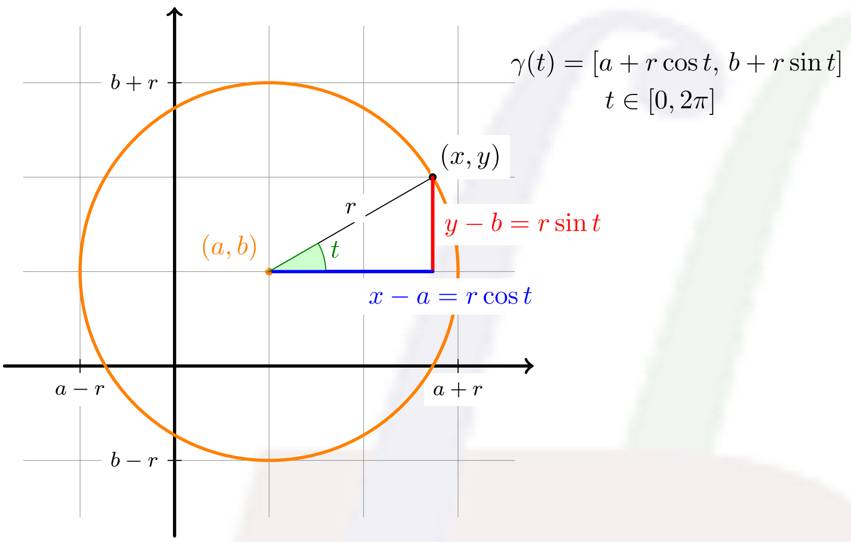
Na poniższym rysunku przedstawiono wyprowadzenie równań parametrycznych dla okręgu o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu długości 1, czyli danego równaniem $x^2 + y^2 = 1$:



Różnica nie jest duża, jeśli promień rozpatrywanego okręgu ma długość r, czyli $x^2 + y^2 = r^2$:



A teraz rozważmy okrąg o równaniu uwikłanym $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$:



Definicja 15.17. *Elipsą* nazywamy zbiór wszystkich punktów P spełniających warunek

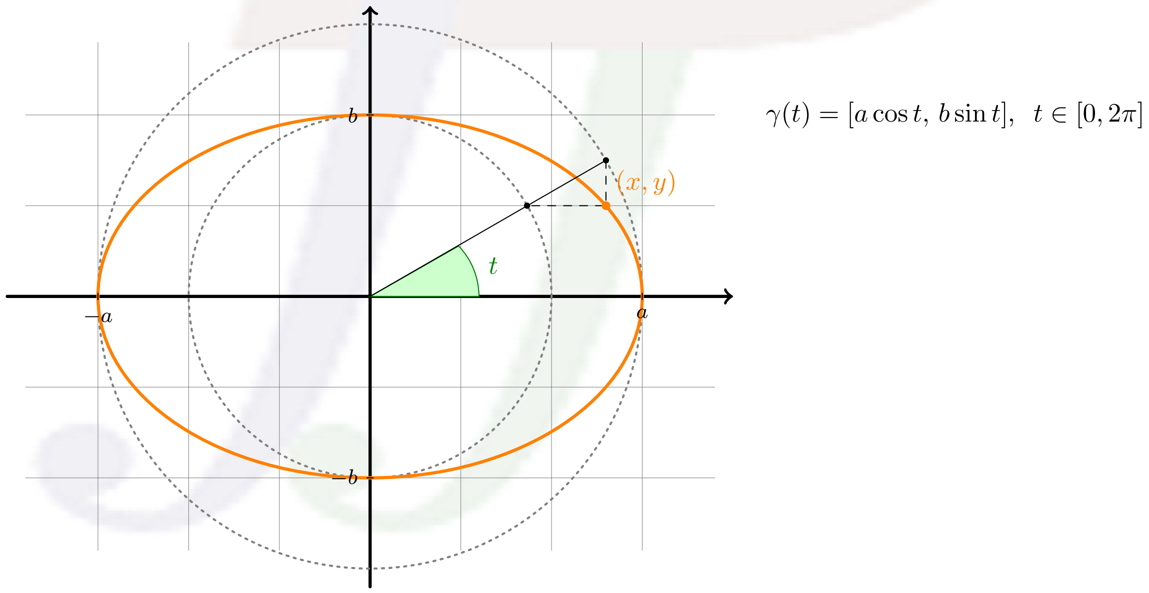
$$|PF_1| + |PF_2| = 2a,$$

gdzie $a > 0$ jest pewną stałą, a F_1 i F_2 są ustalonymi punktami zwanymi *ogniskami* elipsy.

Jeśli $F_1 = (-c, 0)$ i $F_2 = (c, 0)$ oraz $b^2 = a^2 - c^2$, to

$$\boxed{\mathcal{E} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}.}$$

Można powiedziedzieć, że elipsa powstaje przez odpowiednie przeskalowania (spłaszczenie lub rozciągnięcie) okręgu jednostkowego wzdłuż osi układu współrzędnych.



Definicja 15.18. *Hiperbolą* nazywamy zbiór wszystkich punktów P spełniających warunek

$$\Big||PF_1| - |PF_2|\Big| = 2a,$$

gdzie $a > 0$ jest pewną stałą, a F_1 i F_2 są ustalonymi punktami zwanymi *ogniskami* hiperboli.

Jeśli $F_1 = (-c, 0)$ i $F_2 = (c, 0)$ oraz $b^2 = a^2 - c^2$, to

$$\boxed{\mathcal{H} := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \tfrac{x^2}{a^2} - \tfrac{y^2}{b^2} = 1\Big\}.}$$

Opis parametryczny hiperboli to

$$\gamma(t) = \big[\pm a\cosh t,\, b\sinh t\big],$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Definicja 15.19. *Parabolą* nazywamy zbiór wszystkich punktów P spełniających warunek

$$|PF| = d(P, l),$$

gdzie l jest ustaloną prostą, tzw. *kierownicą* paraboli, a F jest ustalonym punktem zwanym *ogniskiem* paraboli.

Jeśli $F = \big(0, \frac{p}{2}\big)$, a l jest prostą o równaniu $y = -\frac{p}{2}$, to

$$\boxed{\mathcal{P} := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 = 2py\big\}.}$$

Opis parametryczny paraboli to przykładowo parametryzacja naturalna:

$$\gamma(t) = \left[t,\, \frac{1}{2p} \cdot t^2\right],$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$.

Kolejne przykłady krzywych płaskich

Spiralą Archimedesa nazywamy krzywą o parametryzacji

$$\gamma\colon [0, +\infty) \ni t \quad\mapsto\quad [t\cos t,\, t\sin t] \in \mathbb{R}^2.$$

Spirala Archimedesa jest trajektorią punktu, który przemieszcza się jednostajnie po półprostej, która z kolei obraca się jednostajnie wokół swojego początku.
Zachęcam Państwa do zapoznania się z innymi rodzajami spirali, przykładowo ze spiralą hiperboliczną lub logarytmiczną.

Bardzo ciekawymi krzywymi, a jednocześnie łatwymi do zdefiniowania, są *krzywe Lissajous* (zob. Ples M., *Krzywe Lissajous - piękno drgań*, Młody Technik, 6 (2015), Wydawnictwo AVT, str. 76-77) opisujące drgania harmoniczne w dwóch prostopadłych kierunkach. Krzywe Lissajous mają następującą parametryzację

$$\gamma(t) = \big[A\sin(at + \varphi),\, B\sin(bt)\big].$$

W szczególnych przypadkach, przy odpowiednio dobranych współczynnikach A, B, a, b i φ, krzywa Lissajous może być elipsą (a nawet okręgiem), linią prostą lub parabolą. Krzywe Lissajous są zamknięte wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.

Ciekawą rodzinę krzywych płaskich tworzą *rulety*, czyli krzywe, jakie zakreśla ustalony punkt krzywej toczącej się bez poślizgu po drugiej krzywej, przy czym obie te krzywe leżą w jednej płaszczyźnie. Przykładem rulety jest cysoida Dioklesa, cykloida, epicykloida czy hipocykloida.

15.2.3 Krzywe przestrzenne

Krzywe w przestrzeni, które można przedstawić jako przecięcie powierzchni opisanych wielomianami, nazywamy *krzywymi algebraicznymi*.

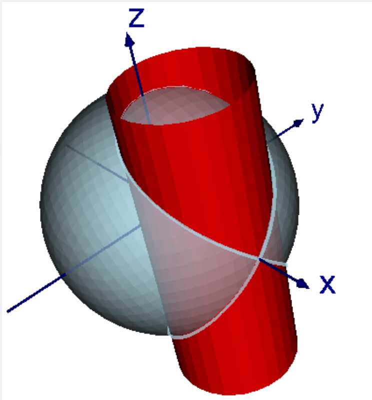
Przykładem krzywej algebraicznej jest *prosta*, ponieważ można ją zdefiniować jako miejsce przecięcia dwóch nierównoległych płaszczyzn (tzw. równanie krawędziowe prostej). Wygodniej jednak pracuje się mając do dyspozycji jej równania parametryczne

$$\gamma\colon \begin{cases} x(t) &= x_0 + v_1 \cdot t, \\ y(t) &= y_0 + v_2 \cdot t, \\ z(t) &= z_0 + v_3 \cdot t, \end{cases}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$. Prosta opisana powyższą parametryzacją przechodzi przez punkt (x_0, y_0, z_0) i jest równoległa do wektora $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3]$ zwanego wektorem kierunkowym tej prostej.

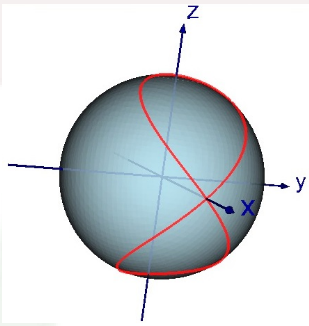
Jedną z najbardziej znanych krzywych przestrzennych jest *krzywa Vivianiego* będącą częścią wspólną przecinających się sfery i powierzchni bocznej walca.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \\ x^2 + y^2 = rx \end{cases}$$



Krzywą Vivianiego można także otrzymać jako trajektorię punktu poruszającego się w charakterystyczny sposób po sferze. To podejście pozwala nam wyprowadzić równania parametryczne tej krzywej.

$$\gamma\colon \begin{cases} [0, 2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \begin{bmatrix} r\cos^2 t \\ r\cos t \sin t \\ r \sin t \end{bmatrix} \end{cases}$$



Przykładem krzywej, która nie jest algebraiczna, jest tzw. *linia śrubowa* lub inaczej *helisa walcowa*. Linia śrubowa jest trajektorią punktu poruszającego się ze stałą prędkością po tworzącej walca, który obraca się jednocześnie ze stałą prędkością kątową wokół swej osi.

Helisa walcowa ma następującą parametryzację:

$$\gamma\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ t & \longmapsto & \begin{bmatrix} a\cos t \\ a \sin t \\ bt \end{bmatrix} \end{cases}$$

gdzie $a, b > 0$. Krzywa o tej parametryzacji jest położona na powierzchni walca, którego osią jest trzecia oś układu współrzędnych, a promień ma długość a. Liczbę b nazywa się skokiem linii śrubowej.

15.2.4 Długość krzywej

Definicja 15.20. Niech $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ będzie opisem parametrycznym krzywej Jordana. *Długością* krzywej γ nazywamy

$$|\gamma| := \sup \left\{ \sum_{i=0}^{m-1} d\Big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})\Big) : \quad a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\},$$

gdzie d jest metryką w $\mathbb{R}^n$, a punkty $P_i := \gamma(t_i)$, $i = 0, \ldots, m$, są punktami krzywej.

Jeśli $|\gamma| < \infty$, to krzywą nazywamy *prostowalną*.

Suma

$$\sum_{i=0}^{m-1} d\Big(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})\Big)$$

jest długością łamanej wpisanej w krzywą o wierzchołkach $P_i := \gamma(t_i)$, czyli wyznaczonej przez podział odcinka $[a,b]$ punktami $(t_i)_{i=0,\ldots,m}$.

Twierdzenie 15.21.
Niech krzywa płaska opisana równaniami parametrycznymi $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, gdzie $t \in [a,b]$, będzie regularna. Wówczas krzywa ta jest prostowalna i jej długość dana jest wzorem

$$|\gamma| \;=\; \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, \mathrm{d}t.$$

Twierdzenie 15.22.
Niech krzywa przestrzenna o parametryzacji $\gamma(t) = \big(x(t),\, y(t),\, z(t)\big)$, gdzie $t \in [a,b]$, będzie regularna. Wówczas krzywa ta jest prostowalna i jej długość dana jest wzorem

$$|\gamma| \;=\; \int_a^b \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, \mathrm{d}t.$$

Wniosek 15.23.
Rozważmy płaską krzywą regularną w postaci jawnej, czyli będącą wykresem funkcji $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ klasy $\mathcal{C}^1$. Wówczas długość części jej wykresu dla $x \in [a,b]$ dana jest wzorem

$$l \;=\; \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Jeśli regularna krzywa płaska dana jest równaniem jawnym postaci $x = g(y)$, gdzie $y \in [c,d]$, to jej długość obliczamy według analogicznego wzoru

$$l \;=\; \int_c^d \sqrt{1 + \left(g'(y)\right)^2}\, dy.$$

Znając pojęcie krzywej możemy teraz wprowadzić wzór na pole zbioru ograniczonego pewną krzywą.

Twierdzenie 15.24. Rozważmy krzywą daną równaniami parametrycznymi $\gamma(t) = [x(t), y(t)]$ dla $t \in (\alpha, \beta)$, gdzie funkcja $y = y(t)$ jest nieujemna, funkcja $x = x(t)$ jest monotoniczna oraz funkcje y i x' są ciągłe.
Wtedy pole zbioru $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ograniczonego krzywą γ, osią Ox oraz prostymi $x = x(\alpha)$ i $x = x(\beta)$ dane jest wzorem

$$|D| = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot |x'(t)|\, \mathrm{d}t.$$

15.3 Objętość bryły obrotowej

Zajmiemy się teraz zastosowaniem całek oznaczonych do obliczania objętości brył obrotowych, tzn. takich, które powstają przez obrót zbioru

$$D := \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \text{i} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)\Big\}$$

wokół osi Ox.
Założenie, że funkcja f jest nieujemna nie zmniejsza ogólności rozważań, ponieważ bryły będą takie same, jeśli f zastąpimy przez $|f|$.

Twierdzenie 15.25. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją całkowalną. Wówczas objętość bryły

$$\mathcal{B}_x := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \text{i} \quad y^2 + z^2 \leqslant f^2(x)\Big\}$$

dana jest wzorem

$$|\mathcal{B}_x| = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Za pomocą całki oznaczonej możemy policzyć także objętość bryły obrotowej powstałej przez obrót powyżej zdefiniowanego zbioru D wokół osi Oy.

Twierdzenie 15.26. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją całkowalną. Wówczas objętość bryły $\mathcal{B}_y$ powstałej przez obrót powyżej zdefiniowanego zbioru D wokół osi Oy dana jest wzorem

$$|\mathcal{B}_y| = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x,$$

o ile $a \geqslant 0$.

Kolejne uogólnienia: ☞ **Na wykładzie!**

Przykład 15.27. ☞ **Na wykładzie!**

15.4 Pole powierzchni obrotowej

Pokażemy teraz, że za pomocą całek oznaczonych możemy obliczać nie tylko objętości brył obrotowych, ale także pola powierzchni, które powstają przy obrocie wykresu pewnej funkcji wokół osi Ox.

Twierdzenie 15.28. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nieujemną klasy $\mathcal{C}^1$. Wówczas pole powierzchni

$$\mathcal{S}_x := \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad a \leqslant x \leqslant b \quad \text{i} \quad y^2 + z^2 = f^2(x)\Big\},$$

tzn. powierzchni powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi Ox, dana jest wzorem

$$|\mathcal{S}_x| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Za pomocą całki oznaczonej możemy policzyć także pole powierzchni obrotowej powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi Oy.

Twierdzenie 15.29. Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją klasy $\mathcal{C}^1$. Wówczas pole powierzchni $\mathcal{S}_y$ powstałej przez obrót wykresu funkcji f wokół osi Oy dane jest wzorem

$$|\mathcal{S}_y| = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x,$$

o ile $a \geqslant 0$.

Kolejne uogólnienia: ☞ **Na wykładzie!**

Przykład 15.30. ☞ **Na wykładzie!**

Część III

Ciągi i szeregi funkcyjne

16 Ciągi funkcyjne

Niech $X \neq \emptyset$ będzie dowolnym podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych. Załóżmy, że dla (prawie) każdego $n \in \mathbb{N}$ dana jest funkcja $f_n\colon X \to \mathbb{R}$. Mówimy wtedy, że określony jest *ciąg funkcyjny* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, czyli ciąg, którego wyrazami są funkcje o wspólnej dziedzinie i przeciwdziedzinie.

Dla ciagów funkcyjnych definiujemy podobne pojęcia, jak dla ciągów liczbowych. A mianowicie ograniczoność, monotoniczność czy zbieżność.
Nie jest to dla nas temat zupełnie nowy. Na wykładzie ze *Wstępu do Analizy Matematycznej* rozpatrywaliśmy ciąg liczbowy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach

$$a_n \;:=\; \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

zależnych od parametru $x \in \mathbb{R}$. Wyznaczyliśmy nawet jego granicę, która oczywiście również była zależna od tego parametru. W świetle powyższej definicji można patrzeć na ten ciąg jako na ciąg funkcyjny $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o wyrazach

$$f_n(x) \;:=\; \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

którego granicą będzie funkcja $f(x) = e^x$.

Oczywiście po wprowadzeniu granicy ciągu funkcyjnego pojawia się naturalne pytanie, czy funkcja graniczna „dziedziczy" własności wyrazów ciągu. Przykładowo, jeśli funkcje f_n są ciągłe (różniczkowalne), to czy ciągła (różniczkowalna) będzie także funkcja będąca granicą ciągu funkcyjnego. Przy próbie odpowiedzi na to pytanie okazuje się, że powyższe podejście do granicy jako granicy ciagu liczbowego zależnego od parametru nie jest wystarczające.

Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcyjnym o wyrazach $f_n\colon \left\{\begin{array}{ccc} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x), \end{array}\right.$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 16.1. Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *zbieżny punktowo* do funkcji f na zbiorze X lub że f jest *granicą punktową* ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, jeżeli dla każdego $x \in X$ ciąg liczbowy $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ jest zbieżny do liczby $f(x) \in \mathbb{R}$, czyli

$$\forall_{x\in X}\; f(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Notacja: $f_n \longrightarrow f$ przy $n \to \infty$.

Zbieżność ciągu $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dla ustalonego $x \in \mathbb{R}$ oznacza, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| \;=\; 0.$$

Przykłady 16.2.

a) Rozważmy ciąg funkcyjny $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$, którego elementy określone są wzorem

$$f_n(x) \;=\; x^n \qquad \text{dla} \qquad n = 1,2,\ldots.$$

Wówczas funkcja

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \in [0,1), \\ 1 & \text{dla} \quad x = 1 \end{cases}$$

jest granicą punktową ciągu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Rozważmy teraz ciąg funkcyjny $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R})$, którego elementy określone są wzorem

$$f_n(x) \;=\; x^n(1-x) \qquad \text{dla} \quad x\in[0,1] \quad \text{i} \quad n=1,2,\ldots.$$

Wówczas rozpatrując osobno $x\in[0,1)$ oraz $x=1$ łatwo można wykazać, że funkcja

$$f(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

jest granicą punktową tego ciągu.

Jak już mówiliśmy, przy ciągach funkcyjnych można postawić sobie pytanie, czy własności funkcji f_n zostają zachowane przy przejściach granicznych. Z podanych powyżej przykładów widać, że ciągłość elementów ciągu funkcyjnego nie musi oznaczać ciągłości funkcji granicznej. Oznacza to, że zbieżność ciągu funkcyjnego nie jest zadowalająca i potrzebujemy mocniejszej zbieżności, tzw. zbieżności jednostajnej.

Definicja 16.3. Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *zbieżny jednostajnie* do funkcji f na zbiorze X, jeśli do dowolnego $\varepsilon>0$ można dobrać taką liczbę naturalną $n_0\in\mathbb{N}$, że nierówność

$$|f_n(x)-f(x)| \;<\; \varepsilon$$

jest spełniona dla każdego $n>n_0$ i dla wszystkich $x\in X$.
Krótko:

$$\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\, \forall_{n>n_0}\, \forall_{x\in X} \;\; |f_n(x)-f(x)| \;<\; \varepsilon.$$

Fakt ten zapisujemy następująco:

$$f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f \qquad \text{przy} \quad n\to\infty$$

lub

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{jednostajnie na} \quad X.$$

Jest raczej oczywiste, że każdy ciąg funkcyjny zbieżny jednostajnie jest także zbieżny punktowo. Badając zatem zbieżność ciągu funkcyjnego $(f_n)_n$ rozpoczynamy od obliczenia jego granicy punktowej. W tym celu dla każdego x obliczamy granicę ciągu liczbowego $(f_n(x))_n$. Liczby x, dla których ta granica istnieje i jest właściwa tworzą zbiór X, na którym ciąg funkcyjny jest zbieżny punktowo. Funkcję graniczną f definiujemy w następujący sposób: $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Tylko ta funkcja może być granicą w sensie jednostajnym!

Zbieżność jednostajna ciągu funkcji rzeczywistych (f_n) do funkcji f na przedziale [a,b] ma prostą interpretację geometryczną. W tym przypadku nierówność w defincji zbieżności jednostajnej możemy zapisać jako równoważną nierówność podwójną

$$f(x)\,-\,\varepsilon \;<\; f_n(x) \;<\; f(x)\,+\,\varepsilon.$$

Rysując krzywe o równaniach $y=f(x)-\varepsilon$ i $y=f(x)+\varepsilon$ dostajemy tzw. pas epsilonowy wokół wykresu funkcji f. Zbieżność jednostajna ciągu (f_n) do funkcji f oznacza, że w pasie epsilonowym leżą wszystkie wykresy funkcji f_n dla odpowiednio dużych wskaźników n.
W przykładzie 16.2 pierwszy ciąg funkcyjny nie jest zatem zbieżny jednostajnie! Zatem zbieżność punktowa nie implikuje zbieżności jednostajnej.
Szczegóły: ☞ **Na wykładzie**.

Twierdzenie 16.4. Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcyjnym i $f\colon X\to\mathbb{R}$ będzie daną funkcją. Wtedy następujące warunki są równoważne:

(1) $f_n \overset{X}{\rightrightarrows} f$ przy $n\to\infty$;

(2) $d_n\to 0$ przy $n\to\infty$, gdzie

$$d_n := \sup\{|f_n(x)-f(x)|:\; x\in X\}$$

dla $n\in\mathbb{N}$.

Dowód: ☞ **Na wykładzie**

Zauważmy, że $d_n = d(f_n, f)$, gdzie

$$d(f,g) \ := \ \sup\{|f(x)-g(x)|:\ x\in X\}$$

jest metryką w zbiorze funkcji ograniczonych (zob. wykład *Wstęp do Topologii*). Zatem liczbę d_n możemy traktować jako odległość funkcji f_n i f.

Przykłady 16.5. Przykłady zastosowania twierdzenia 16.4 zostaną podane na wykładzie.

Okazuje się, że zbieżność jednostajna zachowuje własność ograniczoności.

Twierdzenie 16.6. Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ograniczonych jest funkcją ograniczoną.

Dowód: ☞ **Na wykładzie**

Ponadto zbieżność jednostajna zachowuje własność ciągłości.

Twierdzenie 16.7. Granica jednostajnie zbieżnego ciągu funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Dowód: ☞ **Na wykładzie**

Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe, tzn. ciąg funkcji ciągłych może być zbieżny niejednostajnie do funkcji ciągłej.

Przykład 16.8. ☞ **Na wykładzie!**

Jednostajna ograniczoność czy też jednostajna zbieżność ciągu funkcyjnego jest związana ze zbiorem X, na którym zdefiniowane są funkcje będące wyrazami tego ciągu. Podobnie było z definicją jednostajnej ciągłości funkcji (zob. wykład ze *Wstępu do Analizy Matematycznej*).
Z tego powodu wprowadzamy też pojęcie niemal jednostajnej zbieżności i mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *zbieżny niemal jednostajnie* do funkcji f, jeśli $f_n \rightrightarrows f$ na dowolnym zwartym (domkniętym i ograniczonym) podzbiorze zbioru X.
Bezpośrednio z definicji wynika natomiast, że jeśli ciąg funkcyjny jest zbieżny punktowo (lub jednostajnie) na zbiorze X, to jest zbieżny punktowo (lub jednostajnie) na każdym zbiorze $A\subseteq X$.

16.1 Kryteria zbieżności jednostajnej

Podamy teraz warunek równoważny zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego zwany jednostajnym warunkiem Cauchy'ego (zob. Warunek Cauchy'ego dla ciągów liczbowych, wykład ze *Wstępu do Analizy Matematycznej*).

Twierdzenie 16.9. Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcyjnym, gdzie $f_n\colon X\to\mathbb{R}$ dla $n\in\mathbb{N}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:

(1) Ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji;

(2) Dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje takie $n_0\in\mathbb{N}$, że nierówność

$$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$$

jest spełniona dla wszystkich $n,m>n_0$ i dla wszystkich $x\in X$.
Krótko:

$$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{n,m>n_0}\ \forall_{x\in X}\ \ |f_n(x)-f_m(x)| \ < \ \varepsilon$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie**

Dla ciagów funkcyjnych możemy oprócz zbieżności rozpatrywać także inne pojęcia znane z teorii ciągów liczbowych.

Definicja 16.10. Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *(jednostajnie) ograniczony*, jeśli istnieje stała $M \geqslant 0$ taka, że nierówność
$$|f_n(x)| \leqslant M$$
jest spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla wszystkich $x \in X$.
Krótko:
$$\exists_{M\geqslant 0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \forall_{x\in X}\ |f_n(x)| \leqslant M.$$

Definicja 16.11. Mówimy, że ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest *rosnący*, jeśli nierówność
$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$$
jest spełniona dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i dla wszystkich $x \in X$.

Analogicznie definiujemy inne rodzaje ciągów monotonicznych (ciągi silnie rosnące, malejące i silnie malejące).

Okazuje się, że istnieje związek między monotonicznością ciągów a zbieżnością jednostajną.

Twierdzenie 16.12. **[Diniego]**
Niech funkcje $f,\ f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$ będą ciągłe. Jeśli ciąg $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny i zbieżny punktowo do $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, to $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ przy $n \to \infty$.

Dowód: ☞ **Na wykładzie**

Przedział $[a,b]$ możemy zastąpić dowolonym podzbiorem zwartym (domkniętym i ograniczonym) zbioru liczb rzeczywistych. Warto również wiedzieć, że znane są inne sformułowania twierdzenia Diniego.

16.2 Twierdzenia o przejściach granicznych

W tym rozdziale zajmiemy się własnościami granic ciągów funkcyjnych zbieżnych jednostajnie. Nasze rozważania rozpoczniemy od następującego twierdzenia.

Twierdzenie.
Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcyjnym, gdzie $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ dla $n \in \mathbb{N}$, oraz niech x_0 będzie punktem skupienia zbioru X.
Wtedy jeśli

- $f_n \underset{X}{\rightrightarrows} f$ przy $n \to \infty$ oraz
- dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ istnieje granica właściwa $a_n := \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$,

to istnieje granica właściwa $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

Twierdzenie to można skrótowo (sic!) podsumować następującą równością

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x).}$$

Analogiczne twierdzenie można wykazać, jeśli granice $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \pm\infty$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.

Mówiliśmy już, że zbieżność jednostajna zachowuje własność ciągłości. Teraz zastanowimy się, czy przy przejściach granicznych zachowuje się całkowalność wyrazów ciągu funkcyjnego i jeśli tak, to co można powiedzieć o całce z granicy takiego ciągu.
Inaczej mówiąc, pytanie brzmi, kiedy funkcja zdefiniowana jako granica ciągu funkcyjnego jest całkowalna i jak policzyć całkę z takiej funkcji.

Podobnie jak poprzednio okazuje się, że założenie tylko zbieżności punktowej może nie być wystarczające.

Przykład 16.13. ☞ **Na wykładzie!**

Sytuacja poprawia się przy założeniu zbieżności jednostajnej ciągu funkcyjnego.

Twierdzenie 16.14. **[o całkowaniu ciagów jednostajnie zbieżnych]**
Niech $f_n \in \mathcal{R}[a,b]$ dla $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ przy $n \to \infty$, to $f \in \mathcal{R}[a,b]$ oraz

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie**

Powyższe twierdzenie nazywane jest także *twierdzeniem o jednostajnym przejściu do granicy pod znakiem całki.*

Warto znać także inne twierdzenie tego typu, które podamy bez dowodu i w którym założenie zbieżności jednostajnej zostało zastąpione założeniem o monotoniczności funkcji.

Twierdzenie 16.15.
Niech $f,\, f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, będą funkcjami *rosnącymi* (lub *malejącymi*). Jeśli $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ punktowo na $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x.$$

Zauważmy, że nie musimy zakładać całkowalności występujących w twierdzeniu funkcji, ponieważ zapewnia to ich monotoniczność (zob. twierdzenie 12.22).

A teraz przejdziemy do odpowiedzi na pytanie, kiedy funkcja zdefiniowana jako granica pewnego ciagu funkcyjnego jest różniczkowalna. Jak wcześniej okazuje się, że kluczowe jest tutaj założenie zbieżności jednostajnej.

Przykład 16.16. ☞ **Na wykładzie!**

Twierdzenie 16.17. **[o różniczkowaniu ciagów funkcyjnych]**
Niech funkcje $f_n\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, będą różniczkowalne. Jeśli istnieje taki punkt $x_0 \in (a,b)$, że ciąg liczbowy $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny oraz jeśli $f_n' \rightrightarrows g$ na (a,b), to wtedy

❶ ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$;

❷ funkcja f jest różniczkowalna na (a,b) oraz $f' = g$.

Dowód: ☞ **Na wykładzie (?)**

Twierdzenie jest także prawdziwe dla przedziałów domkniętych, przy czym różniczkowalność na końcach przedziału oznacza istnienie odpowiednich pochodnych jednostronnych.

W praktyce bardzo często mamy do czynienia z sytuacją, że ciąg (f_n) funkcji różniczkowalnych jest punktowo zbieżny na (a,b) do funkcji f, ciąg pochodnych (f_n') jest jednostajnie zbieżny na (a,b) do pewnej funkcji g. Wtedy z powyższego twierdzenia wynika, że $f_n \rightrightarrows f$, funkcja f jest różniczkowalna i jej pochodna $f' = g$.

16.3 Twierdzenie aproksymacyjne Weierstrassa

Okazuje się, że często ważna jest możliwość jednostajnej aproksymacji (przybliżania) pewnej funkcji innymi funkcjami. Podamy teraz (bez dowodu) jedno z fundamentalych twierdzeń dotyczących tego tematu.

Twierdzenie 16.18. **[Weierstrassa o aproksymacji]**
Niech $f \in \mathcal{C}[a,b]$. Wówczas istnieje ciąg wielomianów $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o współczynnikach rzeczywistych taki, że $P_n \rightrightarrows f$ na $[a,b]$ przy $n \to \infty$.

Zauważmy, że składając dane funkcje z odpowiednimi funkcjami liniowymi, wystarczy udowodnić powyższe twierdzenie na odcinku $[0,1]$. Z tego powodu bardzo często dowód twierdzenia Weierstrassa ogranicza się do udowodnienia tzw. twierdzenia Bernsteina.

Twierdzenie 16.19. **[Bernsteina]**
Niech $f \in \mathcal{C}[0,1]$ i niech wielomiany B_n dla $n \in \mathbb{N}$ będą zdefiniowane następująco

$$B_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad \text{dla} \quad x \in [0,1].$$

Wówczas $B_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$ przy $n \to \infty$.

Wielomiany B_n nazywane są *wielomianami Bernsteina* i są tzw. wielomianami interpolacyjnymi, tzn. do ich zdefiniowana potrzebna jest znajomość wartości funkcji f w $n+1$ punktach przedziału $[0,1]$. Uwzględniając ich zależność od funkcji f często używa się też oznaczenia $B_n(f)$.

17 Szeregi funkcyjne

Naszym tematem będą teraz szeregi funkcyjne, a więc szeregi, których wyrazami są funkcje, oraz ich zbieżność. W tym miejscu zalecamy Czytelnikowi powtórkę wiadomości dotyczących szeregów liczbowych z wykładu *Wstęp do Analizy Matematycznej*.

Na tym właśnie wykładzie zdefiniowaliśmy funkcję eksponencjalną jako sumę pewnego szeregu

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

który teraz będziemy nazywać szeregiem funkcyjnym. W zeszłym semestrze korzystając z kryterium d'Alamberta sprawdziliśmy, że szereg ten jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$, czyli stwierdziliśmy jego zbieżność punktową. W tym rozdziale, podobnie jak to było dla ciągów funkcyjnych, okaże się, że bardziej korzystna jest dla nas zbieżność jednostajna.

Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcyjnym o wyrazach $f_n\colon \begin{cases} X & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x), \end{cases}$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Definicja 17.1. Ciąg funkcyjny $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdzie funkcje S_n są zdefiniowane następująco

$$S_n\colon X \ni x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \cdots + f_n(x) \in \mathbb{R},$$

nazywamy *szeregiem funkcyjnym* o wyrazach f_n, $n \in \mathbb{N}$.
Notacja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n, \qquad \sum_{n\geqslant 1} f_n, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n, \qquad \sum f_n$$

Ciąg $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy także *ciągiem sum częściowych* szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, a jego n-ty wyraz S_n – *n-tą sumą częściową*.

Szeregi funkcyjne są zatem pewnymi ciągami funkcyjnymi (ciągami sum częściowych), dlatego rozdział ten będzie właściwie powtórką poprzedniego rozdziału i zapisaniem jego wyników w języku szeregów.

Definicja 17.2. Mówimy, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest

❶ *zbieżny punktowo* w zbiorze X, jeżeli dla każdego $x \in X$ szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny.

❷ *bezwzględnie zbieżny* w zbiorze X, jeżeli dla każdego $x \in X$ szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ jest zbieżny.

❸ *zbieżny jednostajnie* w zbiorze X, jeżeli ciąg funkcyjny $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny w X.

Jeżeli szereg nie jest zbieżny, to mówimy, że jest *rozbieżny*.

Jeżeli szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny, czyli jeżeli zbieżny jest jego ciąg sum częściowych $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, to możemy zdefiniować funkcję $S\colon X \to \mathbb{R}$ jako

$$S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x) \qquad \text{dla} \quad x \in X.$$

Funkcję S nazywamy *sumą szeregu* i piszemy

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Rodzaj zbieżności należy określić lub wynika on z kontekstu.

Przykład 17.3. Rozważmy szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ o wyrazach danych wzorem

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$.

Określmy zatem zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

Jeśli $x = 0$, to $f_n(0) = 0$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Jeśli natomiast $x \neq 0$, to mamy do czynienia ze zbieżnym szeregiem geometrycznym o ilorazie $q = \frac{1}{1+x^2}$. Wynika stąd, że szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ jest zbieżny punktowo w $\mathbb{R}$ oraz jego suma dana jest wzorem

$$S(x) = \begin{cases} 1+x^2 & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

Szereg funkcyjny jest też zbieżny bezwzględnie w $\mathbb{R}$, ponieważ jego wyrazy przyjmują tylko wartości nieujemne. Nie jest natomiast zbieżny jednostajnie w $\mathbb{R}$, ponieważ jego ciąg sum częściowych $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ składa się z funkcji ciągłych zbieżnych do funkcji nieciągłej (zob. twierdzenie 16.7).

Z twierdzenia 16.7 wynika zatem, że jednostajna zbieżność szeregu funkcyjnego o wyrazach ciągłych jest warunkiem wystarczającym ciągłości sumy tego szeregu. Ale nie jest to warunek konieczny, odpowiednie przykłady pojawią się na ćwiczeniach.

Stwierdzenie jednostajnej zbieżności szeregu jest ważne ze względów obliczeniowych. Zbieżność jednostajna związana jest bowiem z warunkami pozwalającymi różniczkować lub odpowiednio całkować szeregi funkcyjne wyraz za wyrazem. Powstaje zatem pytanie, jak sprawdzić czy dany szereg funkcyjny jest zbieżny jednostajnie.

W rozważaniach teoretycznych dużą rolę odgrywa tzw. *warunek Cauchy'ego jednostajnej zbieżności* szeregów funkcyjnych.

Twierdzenie 17.4. **[Warunek Cauchy'ego dla szeregów funkcyjnych]**
Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem funkcji $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $X \subseteq \mathbb{R}$.

Szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest *zbieżny jednostajnie* w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnie wybranej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka naturalna liczba n_ε, że

$$\left| \sum_{i=n+1}^{m} f_i(x) \right| = \left| f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_m(x) \right| < \varepsilon$$

dla wszystkich $m > n > n_\varepsilon$ i dla wszystkich $x \in X$.

Czyli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \text{jest jednostajnie zbieżny} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall m > n > n_\varepsilon \ \forall x \in X\colon \ \left| \sum_{i=n+1}^{m} f_i(x) \right| < \varepsilon.$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie**

Natomiast w zadaniach praktycznych bardziej użyteczne jest następujące kryterium.

Twierdzenie 17.5. **[Kryterium Weierstrassa dla szeregów funkcyjnych]**
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji $f_n\colon X \to \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ i $X \subseteq \mathbb{R}$. Ponadto niech istnieje taki ciąg liczb rzeczywistych (a_n), że

$$\sup \left\{ |f_n(x)| \colon \quad x \in X \right\} \leqslant a_n$$

dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Wówczas, jeżeli szereg liczbowy $\sum a_n$ jest *zbieżny*, to szereg funkcyjny $\sum f_n$ jest *zbieżny jednostajnie* (i bezwzględnie) w zbiorze X.

Dowód: ☞ **Na wykładzie**

Przykład 17.6. ☞ **Na wykładzie!**

Przykład 17.7. Rozważmy szereg funkcyjny
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Z teorii szeregów liczbowych przedstawionej na wykładzie ze *Wstępu do Analizy Matematycznej* wiemy, że szereg takiej postaci, tzw. szereg Dirichleta, jest zbieżny dla każdego ustalonego $x > 1$.

Wynika stąd, że powyższy szereg funkcyjny jest zbieżny punktowo w przedziale $(1, \infty)$. Jego sumę

$$\zeta\colon (1, \infty) \ni x \longmapsto \zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

nazywamy funkcją ζ *(dzeta) Riemanna.*

Zauważmy teraz, że dla $x \geqslant a$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{1}{n^x} \leqslant \frac{1}{n^a}.$$

Z kryterium Weierstrassa otrzymujemy zatem zbieżność jednostajną szeregu funkcyjnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ w każdym przedziale postaci $\mathcal{I}_a = [a, \infty)$ dla ustalonego $a > 1$.

Z twierdzenia o ciągłości sumy szeregu funkcyjnego wynika zatem, że funkcja ζ jest ciągła w dowolnym punkcie $x_0 > a$. Niech teraz $x_0 > 1$ będzie dowolnym, ale ustalonym punktem. Wtedy istnieje liczba rzeczywista a spełniająca warunek
$$x_0 > a > 1,$$
czyli funkcja ζ musi być ciągła w tym punkcie. Wobec dowolności wyboru punktu x_0 oznacza to, że funkcja ζ Riemanna jest ciągła w całym przedziale $(1, \infty)$.

Podamy teraz kolejne kryteria zbieżności jednostajnej szeregów funkcyjnych. Warto w tym miejscu przypomnieć sobie analogiczne kryteria dla szeregów liczbowych i ich dowody.

Twierdzenie 17.8. **[Kryterium Abela dla szeregów funkcyjnych]**
Niech funkcje $f_n, g_n\colon X \to \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, spełniają następujące warunki:

A1) Dla dowolnie ustalonego $x \in X$ ciąg liczbowy $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny;

A2) Ciąg $\big(f_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ jest jednostajnie ograniczony, tzn. istnieje stała M taka, że
$$|f_n(x)| \leqslant M$$
dla wszystkich $x \in X$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}$;

A3) Szereg funkcyjny
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$$
jest jednostajnie zbieżny w zbiorze X.

Wówczas szereg funkcyjny $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \cdot g_n$ jest zbieżny jednostajnie w zbiorze X.

Przykład 17.9. Zbieżność jednostajna szeregu funkcyjnego
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{x}{\pi}}{n^{x+\pi}}$$
w przedziale $\mathcal{I} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ wynika z kryterium Abela zastosowanego do ciągów funkcji $f_n(x) = \cos\frac{x}{\pi}$ i funkcji $g_n(x) = \frac{1}{n^{x+\pi}}$.

Twierdzenie 17.10. [**Kryterium Dirichleta dla szeregów funkcyjnych**]
Niech funkcje $f_n, g_n \colon X \to \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, spełniają następujące warunki:

D1) Dla dowolnie ustalonego $x \in X$ ciąg liczbowy $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ jest monotoniczny;

D2) Ciąg funkcyjny $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale X do funkcji równej tożsamościowo zeru;

D3) Ciąg sum częściowych szeregu $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ jest jednostajnie ograniczony w zbiorze X, tzn. istnieje stała M taka, że

$$|S_n(x)| \leqslant M$$

dla wszystkich $x \in X$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}$, gdzie $S_n(x) = \sum\limits_{k\leqslant n} g_k(x)$.

Wówczas szereg funkcyjny $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \cdot g_n$ jest zbieżny jednostajnie w zbiorze X.

Przykład 17.11. Zbieżność jednostajna szeregu funkcyjnego

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$$

w przedziale $\mathcal{I} = [a, \infty)$, gdzie $a > 0$, wynika z kryterium Dirichleta zastosowanego do funkcji $f_n(x) = \frac{1}{n^{x-\frac{a}{2}}}$ i funkcji $g_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\frac{a}{2}}}$.

Zadanie domowe. Udowodnić następujące kryterium zbieżności jednostajnej:

Niech funkcje $f_n \colon X \to \mathbb{R}_+$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, spełniają następujące warunki:

L1) Dla dowolnie ustalonego $x \in X$ ciąg liczbowy $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ jest malejący;

L2) Ciąg funkcyjny $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale X do funkcji równej tożsamościowo zeru.

Wówczas szereg funkcyjny $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1} f_n$ jest zbieżny jednostajnie w zbiorze X.

17.1 Całkowanie i różniczkowanie szeregów funkcyjnych

Prostym wnioskiem (☞ **Zadanie domowe!**) z twierdzeń o całkowaniu i różniczkowaniu ciągów funkcyjnych (zob. twierdzenie 16.14 i twierdzenie 16.17) są analogiczne twierdzenia dla szeregów funkcyjnych.

Twierdzenie 17.12. [**o całkowaniu szeregów funkcyjnych**]
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji całkowalnych na przedziale $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ oraz niech funkcja $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie sumą szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ zbieżnego jednostajnie na przedziale $[a, b]$.
Wtedy funkcja f jest całkowalna na tym przedziale oraz zachodzi równość

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Twierdzenie 17.13. [**o różniczkowaniu szeregów funkcyjnych**]
Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji różniczkowalnych na przedziale $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ i niech szereg liczbowy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ będzie zbieżny w pewnym punkcie $x_0 \in (a, b)$.
Jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale (a, b), to także szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ jest zbieżny jednostajnie na tym przedziale do funkcji różniczkowalnej f oraz zachodzi równość

$$f'(x) \;=\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Przykład 17.14. ☞ **Na wykładzie!**

18 Szeregi potęgowe

Na wykładzie ze *Wstępu do Analizy Matematycznej* rozważaliśmy tzw. szereg geometryczny $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ o ilorazie $q \in \mathbb{R}$ i wykazaliśmy, że jest on zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek $|q| < 1$.
Jeśli teraz potraktujemy iloraz q jako zmienną x, to otrzymamy szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

zbieżny w przedziale $(-1, 1)$, którego sumą jest funkcja $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Jest to przykład szczególnego szeregu funkcyjnego zwanego *szeregiem potęgowym.*

Definicja 18.1. Niech x_0 będzie ustaloną liczbą rzeczywistą, a ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ustalonym ciągiem liczb rzeczywistych.
Szereg postaci

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n = a_0 + a_1\,(x-x_0) + a_2\,(x-x_0)^2 + \cdots, \qquad x \in \mathbb{R},}$$

nazywamy *szeregiem potęgowym o środku w punkcie x_0*. Liczby $a_n \in \mathbb{R}$ nazywamy *współczynnikami szeregu potęgowego*.

Szereg potęgowy jest zatem szeregiem funkcyjnym $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$, w którym funkcje $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dane są wzorem $f_n(x) = a_n(x - x_0)^n$ dla ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}$.

Przykład 18.2. Przykładem szeregu potęgowego jest funkcja eksponencjalna

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

i funkcje trygonometryczne

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{oraz} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

(zob. wykład ze *Wstępu do Analizy Matematycznej*).

Szeregi potęgowe nie muszą być zbieżne dla każdego $x \in \mathbb{R}$, chociaż dziedziną ich wszystkich sum częściowych jest cały zbiór liczb rzeczywistych. Z tego powodu ważne jest wyznaczenie *przedziału zbieżności*

$$\mathcal{P} := \left\{ x \in \mathbb{R} \colon \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n \text{ jest zbieżny} \right\}$$

szeregu potęgowego, tzn. zbioru tych wszystkich $x \in \mathbb{R}$, dla których szereg jest zbieżny.
Zauważmy, że zbieżność szeregu z definicji 18.1 w punkcie $x = x_0$ jest oczywista, zatem $\mathcal{P} \neq \emptyset$.

Jak się okaże zbiór $\mathcal{P}$ jest rzeczywiście przedziałem, czyli powyższa nazwa jest w pełni uzasadniona.

Twierdzenie 18.3. [**Lemat Abela**]

- Jeśli szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ jest *zbieżny* w punkcie $\hat{x} \neq x_0$, to jest *bezwzględnie zbieżny* w każdym punkcie przedziału $\big(x_0 - r, x_0 + r\big)$, gdzie $r := |\hat{x} - x_0|$, czyli w każdym punkcie x spełniającym warunek
$$|x - x_0| < |\hat{x} - x_0|.$$

- Jeśli szereg potęgowy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ jest *bezwzględnie zbieżny* w pewnym punkcie $\hat{x} \neq x_0$, to szereg ten jest *jednostajnie zbieżny* na przedziale $\big[x_0 - r, x_0 + r\big]$, gdzie $r := |\hat{x} - x_0|$.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Bezpośrednim wnioskiem z lematu Abela jest następujący fakt.

Wniosek 18.4. Jeśli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest rozbieżny w punkcie $\hat{x} \neq x_0$, to jest rozbieżny w każdym punkcie $x \in \big(-\infty, x_0 - r\big) \cup \big(x_0 + r, \infty\big)$, gdzie $r := |\hat{x} - x_0|$.

18.1 Promień zbieżności szeregu potęgowego

Z poprzednich rozważań wynika, że środek szeregu potęgowego jest środkiem maksymalnego przedziału otwartego, w którym ten szereg jest zbieżny, czyli przedziału zbieżności.

Umożliwia nam to wprowadzenie następującej definicji.

Definicja 18.5. Oznaczmy przez $\mathcal{P}$ zbiór wszystkich liczb x, dla których szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest zbieżny. Wtedy

$$\boxed{R \;:=\; \sup\big\{|x-x_0| : \quad x \in \mathcal{P}\big\}}$$

nazywamy *promieniem zbieżności* danego szeregu potęgowego.

Twierdzenie 18.6. Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

Jeśli $0 < R < +\infty$, to szereg ten jest

- bezwzględnie zbieżny w każdym punkcie przedziału $(x_0 - R, x_0 + R)$;
- rozbieżny w każdym punkcie zbioru $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$;
- jednostajnie zbieżny na przedziale $[x_0 - r, x_0 + r]$ dla każdego $r \in (0, R)$.

Jeśli $R = 0$, to szereg ten jest zbieżny jedynie w punkcie $x = x_0$. Jeśli $R = +\infty$, to szereg jest zbieżny bezwzględnie w każdym punkcie prostej rzeczywistej.

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

☞ W punktach $x = x_0 - R$ i $x = x_0 + R$ szereg potęgowy może być zbieżny (bezwzględnie lub warunkowo) lub rozbieżny! Każdy szczególny przypadek musimy rozważać osobno.

Wniosek 18.7. Suma szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ jest funkcją ciagłą wewnątrz przedziału zbieżności tego szeregu.

Oznacza to między innymi, że wspomniane na początku działu funkcja eksponencjalna oraz funkcje sinus i cosinus są ciągłe.

Do wyznaczania promienia zbieżności szeregu potęgowego bardziej od definicji przydatne jest następujące twierdzenie, będące bezpośrednim wnioskiem z kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregów.

Twierdzenie 18.8. [**Cauchy'ego-Hadamarda**]
Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych i niech istnieje granica

$$\lambda \;:=\; \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Wtedy promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ dany jest wzorem

$$R \;=\; \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \lambda = +\infty, \\ \frac{1}{\lambda} & \text{dla} \quad 0 < \lambda < +\infty, \\ +\infty & \text{dla} \quad \lambda = 0. \end{cases}$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Natomiast korzystając z kryterium d'Alemberta zbieżności szeregów możemy wykazać kolejny wzór ułatwiający wyznaczanie promienia zbieżności.

Twierdzenie 18.9. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczbowym, w którym wszystkie wyrazy są niezerowe, oraz niech istnieje granica

$$\mu := \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Wtedy promień zbieżności R szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ dany jest wzorem

$$R = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \mu = +\infty, \\ \frac{1}{\mu} & \text{dla} \quad 0 < \mu < +\infty, \\ +\infty & \text{dla} \quad \mu = 0. \end{cases}$$

Przykład 18.10. ☞ **Na wykładzie!**

18.2 Różniczkowanie i całkowanie sumy szeregu potęgowego

Z twierdzeń o całkowaniu i różniczkowaniu szeregów funkcyjnych (zob. twierdzenie 17.12 i twierdzenie 17.13) wynikają natychmiast twierdzenia dotyczące różniczkowania i całkowania sumy szeregu potęgowego.

Sumy częściowe szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ są wielomianami, czyli są funkcjami klasy $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
Oznacza to, że jeżeli promień zbieżności R tego szeregu jest dodatni lub równy $+\infty$, to suma szeregu jest także funkcją różniczkowalną nieskończenie wiele razy w przedziale zbieżności.

Definicja 18.11. Szereg

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}}$$

nazywamy *szeregiem pochodnym* szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$.

Szereg pochodny jest również szeregiem potęgowym, można go bowiem zapisać w postaci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} (x-x_0)^n$.

Łatwo można sprawdzić, wykorzystując znaną granicę specjalną $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, że szereg potęgowy i jego szereg pochodny mają ten sam promień zbieżności.

Twierdzenie 18.12. [**Różniczkowanie szeregu potęgowego wyraz po wyrazie**]
Niech $R > 0$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ oraz niech

$$f\colon (x_0 - R, x_0 + R) \ni x \quad\longmapsto\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \in \mathbb{R}$$

będzie jego sumą.
Wówczas funkcja $f \in \mathcal{C}^\infty(x_0 - R, x_0 + R)$ oraz jej pochodna rzędu $k > 0$ jest szeregiem potęgowym

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (x-x_0)^{n-k}, \qquad x \in (x_0 - R, x_0 + R).$$

W szczególności dla $k = 1$ dostajemy szereg pochodny.
Ponadto łatwo teraz zauważyć, że współczynniki szeregu potęgowego można jednoznacznie przedstawić wzorami

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

dla dowolnego $n \geqslant 0$. Oznacza to, że szereg potęgowy jest szeregiem Taylora swojej sumy (zob. następny rozdział). Czyli żadnej funkcji nie można przedstawić w postaci zbieżnego szeregu potęgowego o środku w danym punkcie na dwa istotnie różne sposoby.

Z powyższego twierdzenia wynika również, że wspomniane na początku działu funkcja eksponencjalna oraz funkcje sinus i cosinus są klasy $\mathcal{C}^\infty$.

Suma szeregu potęgowego jest funkcją ciągła we wnętrzu przedziału zbieżności, a jak wiemy funkcje ciągłe są całkowalne w sensie Riemanna (zob. twierdzenie 12.17) oraz mają pierwotne (zob. twierdzenie 13.2 i wniosek 13.4).

Twierdzenie 18.13. [**Całkowanie szeregu potęgowego wyraz po wyrazie**]
Niech $R > 0$ będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ oraz niech $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.
Wówczas
$$\int_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_0)^n \, \mathrm{d}t \; = \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \, (x - x_0)^{n+1} .$$

Przykłady 18.14. ☞ **Na wykładzie!**

19 Szereg Taylora

Jeśli funkcja f w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ jest sumą szeregu potęgowego postaci
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n ,$$
to mówimy, że *funkcja f rozwija się* w otoczeniu punktu x_0 *w szereg potęgowy* lub *w szereg Taylora*.

Wtedy szereg $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ nazywamy *rozwinięciem funkcji f* w szereg potęgowy w otoczeniu punktu x_0 lub rozwinięciem w szereg Taylora.

Uzasadnieniem powyższej nazwy jest następujące twierdzenie (zob. także def. 9.2).

Twierdzenie 19.1. Jeśli funkcja f rozwija się w pewnym otoczeniu punktu x_0 w szereg potęgowy $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, to rozwinięcie to jest określone **jednoznacznie**, ponadto
$$a_n \; = \; \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad \text{dla} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dowód: ☞ **Na wykładzie!**

Definicja 19.2. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną nieskończenie wiele razy w punkcie $x_0 \in (a,b)$. Szereg potęgowy
$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n}$$
nazywamy *szeregiem Taylora* funkcji f o środku w punkcie x_0.
Dla $x_0 = 0$ szereg ten nazywamy jest *szeregiem Maclaurina*.

Wyznaczając szereg Taylora danej funkcji według powyższej definicji możemy napotkać na następujące problemy:

- Otrzymany szereg nie musi być zbieżny.
- Nawet jeśli jest zbieżny, to jego sumą nie musi być funkcja f.

Przykład 19.3. ☞ **Na wykładzie!**

Wprost ze wzoru Taylora (zob. twierdzenia 9.3) otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 19.4. Niech $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^\infty$ i niech $x_0 \in (a,b)$ będzie ustalonym punktem. Wówczas funkcja f rozwija się w pewnym otoczeniu $\mathcal{U}$ punktu x_0 w szereg potęgowy

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k \qquad \text{dla wszystkich} \quad x \in \mathcal{U}}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x,x_0) = 0$$

dla każdego $x \in \mathcal{U}$.

Z twierdzenia 19.1 o jednoznaczności wynika, że szereg Taylora jest jedyną możliwością przedstawienia funkcji klasy $\mathcal{C}^\infty$ w otoczeniu punktu z dziedziny jako szeregu potęgowego.

Znane są nam już rozwinięcia następujących funkcji w szereg potęgowy. Te rozwinięcia są jednocześnie szeregami Taylora tych funkcji i do nich są zbieżne, oczywiście w przedziałach zbieżności.

Funkcja	Szereg	Promień zbieżności
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$	1
$\frac{1}{(1-x)^2}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$	1
$\exp(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	∞
$\sin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞
$\cos(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞
$\sinh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	∞
$\cosh(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$	∞
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$	1
$(1+x)^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$	1

Z powyższych szeregów poprzez drobne modyfikacje możemy uzyskać podobne rozwinięcia innych funkcji w szereg potęgowy.

Przykład 19.5. ☞ **Na ćwiczeniach!**

Mówimy, że funkcja $f\colon X \to \mathbb{R}$ jest *funkcją analityczną w punkcie $x_0 \in X$*, gdy f rozwija się w szereg potęgowy w otoczeniu punktu x_0. Mówimy, że f jest *funkcją analityczną* w zbiorze X, gdy f jest funkcją analityczną w każdym punkcie zbioru X.

Przykład 19.6. ☞ **Na ćwiczeniach!**

Powodzenia na egzaminie!