

# mechanika

Wybrane zagadnienia analizy schematów  
zniszczenia materiałów i konstrukcji

redakcja

Stefan Bućko

Agnieszka Chojnacka-Brożek

Grzegorz Milewski

Kraków 2021



Politechnika Krakowska  
im. Tadeusza Kościuszki

# mechanika

Wybrane zagadnienia analizy schematów  
zniszczenia materiałów i konstrukcji

redakcja

Stefan Bućko

Agnieszka Chojnacka-Brożek

Grzegorz Milewski

Kraków 2021



PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTWA POLITECHNIKI KRAKOWSKIEJ  
Tomasz Kapecki

PRZEWODNICZĄCY KOLEGIUM REDAKCYJNEGO WYDAWNICTW DYDAKTYCZNYCH  
Agata Zachariasz

REDAKTOR SERII – MECHANIKA  
Artur Ganczarski

RECENZENCI  
Dariusz Boroński  
Paweł Pyrzański

KOORDYNATORZY PROJEKTU  
Małgorzata Kowalczyk  
Otmar Vogt

REDAKTOR WYDAWNICZY  
Agnieszka Filosek

KOREKTA  
Agnieszka Filosek

SKŁAD I ŁAMANIE  
Adam Bania

PROJEKT OKŁADKI  
Karolina Szafran

Tekst został opublikowany w ramach projektu „Programowanie doskonałości – PK XXI 2.0. Program rozwoju Politechniki Krakowskiej na lata 2018-22”  
Dofinansowanie z Europejskiego Funduszu Społecznego: 18,048,774.96 PLN

© Copyright by Politechnika Krakowska



<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

Edycja online  
eISBN 978-83-67188-00-5

11 ark. wyd.

Wydawnictwo PK, ul. Skarżyńskiego 1, 31-866 Kraków; 12 628 37 25, fax 12 628 37 60  
wydawnictwo@pk.edu.pl  
www.wydawnictwo.pk.edu.pl  
Adres korespondencyjny: ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków



## SPIS TREŚCI

Wspomnienie .....	5
Słowo wstępne .....	7
1. Podstawowe problemy statycznej próby rozciągania w świetle normy PN-EN ISO 6892-1 (oraz norm wcześniejszych i nowych badań) – STEFAN BUĆKO, AGNIESZKA CHOJNACKA-BROŻEK, HENRYK JODŁOWSKI .....	9
2. Podstawy reologii w mechanice konstrukcji – GRZEGORZ MILEWSKI .....	27
3. Naprężenia i odkształcenia przy obciążeniach uderowych – STEFAN BUĆKO .....	50
4. Wyznaczanie naprężeń własnych metodą trepanacji otworowej – STEFAN BUĆKO, HENRYK JODŁOWSKI .....	63
5. Analiza niestandardowych przykładów współdziałania sił poprzecznych i momentów zginających w belkach – STEFAN BUĆKO, AGNIESZKA CHOJNACKA-BROŻEK .....	71
6. Wybrane problemy analizy przypadków wytrzymałości złożonej prętów – STEFAN BUĆKO, AGNIESZKA CHOJNACKA-BROŻEK .....	96
7. Stan naprężenia i odkształcenia w konstrukcji powłokowej na przykładzie zbiornika ciśnieniowego – STEFAN BUĆKO, MARCIN TRZEBICKI .....	136
8. Wybrane zagadnienia mechaniki pękania – STEFAN BUĆKO, HENRYK JODŁOWSKI, GRZEGORZ MILEWSKI .....	155
9. Stateczność konstrukcji – STEFAN BUĆKO, AGNIESZKA CHOJNACKA-BROŻEK .....	177
10. Zagadnienia wytrzymałości zmęczeniowej metali – STEFAN BUĆKO, AGNIESZKA CHOJNACKA-BROŻEK .....	200

## WSPOMNIENIE

W końcowej fazie redakcji podręcznika zmarł nasz wieloletni Kolega i Współpracownik dr hab. inż. Stefan Bućko, emerytowany profesor Politechniki Krakowskiej. Przez całe swoje życie zawodowe był związany z Wydziałem Mechanicznym Politechniki Krakowskiej, w którym zdobywał kolejne stopnie naukowe: mgra inż. (1962), dra (1970) oraz dra hab. (2002). W 2004 roku został mianowany na stanowisko profesora PK. W latach 1978–2009 nieprzerwanie pełnił funkcję z-cy dyrektora Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, a następnie Instytutu Mechaniki Stosowanej na Wydziale Mechanicznym PK. Równocześnie w latach 1980–1996 był doradcą naukowym i kierownikiem Zespołu Badań Modelowych Zakładu Urządzeń Technicznych „ZGODA” w Świętochłowicach.

Był wybitnym specjalistą i praktykiem w dziedzinie analizy wytrzymałościowej elementów konstrukcji maszyn i urządzeń technicznych, szczególnie w zakresie pras hydraulicznych o dużych naciskach oraz urządzeń wyciągowych stosowanych w przemyśle wydobywczym. Pod jego kierownictwem opracowano koncepcje konstrukcji, obliczenia wytrzymałościowe oraz wytyczne do projektów technicznych serii bębnowych wykonanych i zmontowanych przez ZUT „ZGODA” w kopalniach węgla oraz rud miedzi. Rozwiązania te, poza optymalizacją wytrzymałościową konstrukcji, istotnie skracaly czas montażu bębna na wale wyciągu. Ważną częścią jego działalności naukowo-konstrukcyjnej stanowiły prace poświęcone konstrukcji pras hydraulicznych, w tym pras o dużym nacisku (do 200 MN) przeznaczonych do kucia matrycowego elementów dla przemysłu zbrojeniowego. Prace doświadczalne i obliczeniowe Profesora pozwoliły na doskonalenie konstrukcji i modernizację pracujących pras do produkcji metali, płyt pilśniowych oraz wiórowych. Za tę działalność zespół pod jego kierownictwem uzyskał w 1981 roku Nagrodę Ministra.

Uczestniczył w licznych projektach badawczych, z których na szczególną uwagę zasługuje grant finansowany przez Komitet Badań Naukowych pt. „Rozwój doświadczalnej metody rozpoznawania makroodkształceń plastycznych w czynnym procesie obciążenia w materiałach wykazujących niestateczność materiałową”, którego był kierownikiem.

Jako uznany specjalista Politechniki Krakowskiej i równocześnie rzeczoznawca Stowarzyszenia Inżynierów Mechaników Polskich w dziedzinach „wytrzymałość i badania materiałów oraz maszyn i urządzeń do przeróbki plastycznej metali” był autorem wielu opracowań, z których najważniejsze to:

*Studium rozwiązania konstrukcyjnego walczaka do płukania kamienia budowlanego – analiza teoretyczna i doświadczalna stateczności naczynia katalizatorowego dla Zakładów Azotowych w Puławach;*

*Koncepcja konstrukcji prasy hydraulicznej do walcowania obwiedniowego PHPO-400 dla firmy Ponar w Żywcu;*

*Analiza stanu naprężenia w denku tłoka silnika okrętowego ZA-40 oraz opracowanie oryginalnej metody obliczeń dla Zakładów Mechanicznych w Andrychowie;*

*Konstrukcja i obliczenia wytrzymałościowe dźwigara do transportu silników okrętowych o masie do 180 ton dla Stoczni Gdańskiej.*

Był autorem około 60 publikacji w czasopismach i materiałach konferencji krajowych i zagranicznych oraz dwóch monografii. Wypromował dwóch doktorów w specjalnościach: Mechanika Konstrukcji oraz Mechanika Eksperymentalna. Był członkiem Sekcji Mechaniki Eksperymentalnej Komitetu Mechaniki PAN. Za swoje zasługi był odznaczony wieloma medalami, m.in. Srebrnym i Złotym Krzyżem Zasługi, Medalem Komisji Edukacji Narodowej, Złotą Odznaką PK, Złotą Odznaką Centralnego Związku Spółdzielczości Mieszkaniowej oraz Złotą Odznaką „Zasłużony Pracownik ZUT Zgoda”, którą sobie szczególnie cenił.

Podręcznik, który trafi w ręce Czytelnika, jest spełnieniem zamierzeń Profesora – przekazania następcom swojej wiedzy i doświadczenia inżynierskiego. Mając nadzieję, że pozycja ta okaże się przydatna dla studentów, doktorantów i młodych pracowników reprezentujących dyscyplinę Inżynieria Mechaniczna, żegnamy tym samym naszego nieodżałowanego Kolegę i wieloletniego Współpracownika.

*Dziękujemy Ci za Twoją pracę, inspiracje i przyjaźń.*

Współautorzy

Grzegorz Milewski

Agnieszka Chojnacka-Brożek

Henryk Jodłowski

Marcin Trzebicki

## SŁOWO WSTĘPNE

Pojawianie się nowych schematów zniszczenia związane jest zwykle z rozwojem technologii wytwarzania materiałów, doskonaleniem metod obliczeniowych i metod produkcji. Niestety projektowanie nowych, bardziej złożonych konstrukcji, wykonywanych z nowych materiałów przynosiło często przykre niespodzianki w postaci „nowych schematów zniszczenia” niepodlegających tradycyjnym schematom i metodom analizy bezpieczeństwa konstrukcji.

Bardzo ważnym, może nawet najważniejszym, celem autorów jest przybliżenie studentom, studiów inżynierskich i magisterskich, znanych i aktualnie opisanych schematów zniszczenia konstrukcji. Doświadczenia z realizacji wielu analiz powaryjnych wykonanych przez autorów wskazują, że – poza przypadkami wad wynikających z niewystarczająco precyzyjnych badań materiałowych – przyczynami awarii są najczęściej pominięcia w analizie konstrukcji pewnego schematu zniszczenia, który właśnie wystąpił. Obserwowane wysiłki projektantów, aby zwiększać dokładność obliczeń, nie mają istotnego znaczenia wobec faktu, że w obliczeniach przyjmuje się często tablicowe wartości właściwości materiałów konstrukcyjnych odbiegające od ich wartości rzeczywistych.

Pominięcie możliwego w danym przypadku schematu zniszczenia może prowadzić do znacznie poważniejszych konsekwencji niż nawet kilkuprocentowy błąd w obliczeniach dla dobrze zdefiniowanego schematu zniszczenia analizowanej konstrukcji. Warto również podkreślić, że znajomość opisanych schematów zniszczenia może mieć ważny wpływ na przyjętą do analizy obliczeniowej koncepcję rozwiązania pozwalającego uniknąć rozwiązań konstrukcyjnych zagrożonych niebezpiecznymi wariantami schematu zniszczenia. Czynnikiem, który może odgrywać – w tych wstępnych rozważaniach – ważną rolę, może być także właściwy dobór materiału, np. zamiast podwyższonej wartości granicy plastyczności ważniejsza może być zdolność do dużych odkształceń plastycznych i duża odporność na kruche pękanie, szczególnie przy konstrukcjach wielkogabarytowych.

W pracy przedstawiono, oczywiście w skróconej formie, ważniejsze znane współcześnie podstawowe schematy zniszczenia konstrukcji, których znajomość ma podstawowe znaczenie dla projektanta, ale jest również ważna dla inżyniera nadzorującego eksploatację maszyn. Charakterystyka schematów zniszczenia wraz z omówieniem metod zabezpieczenia przed ich wystąpieniem jest prezentowana w poszczególnych rozdziałach książki.

Obliczenia metodą elementów skończonych nie zawsze zwiększają znacząco dokładność analizy, gdyż ich wynik zależy od wielu parametrów, w tym od doboru modelu obliczeniowego, a to wymaga dużego doświadczenia i, obok dobrej znajomości MES, także zagadnień z tematyki mechaniki konstrukcji i materiałów. Pokazaliśmy to na przykładzie wpływu „modelu obliczeniowego MES” na wyniki analiz.

Zaprezentowaliśmy również przykład zagadnienia projektowego, w którym warunek bezpieczeństwa dla klasycznego schematu zniszczenia przestaje być „poprawny”, gdyż konstrukcja przekroczyła granicę jego ważności. Skutkiem tego jest konieczność analizy innego schematu zniszczenia, który w tym przypadku okazał się bardziej prawdopodobny i prowadzący do poprawnego warunku bezpieczeństwa. Dowodzi to celowości analizowania różnych schematów zniszczenia konstrukcji, aby nie przeoczyć najbardziej prawdopodobnego. Warto przy tej okazji zaznaczyć, że MES zazwyczaj nie wskazuje potrzeby analizy innego schematu zniszczenia; np. nie wskaże potrzeby analizy stateczności konstrukcji, co zawsze pozostaje w gestii projektanta/konstruktora.

Przedstawiany Państwu podręcznik jest nietypowy ze względu na programy przedmiotów prowadzonych na studiach magisterskich na uczelniach technicznych, grupujących absolwentów różnych kierunków studiów o bardzo zróżnicowanym przygotowaniu w zakresie znajomości metodyki analizy konstrukcji mechanicznych. Mamy głębokie przekonanie, że treści zawarte w prezentowanej książce mogą być przydatne także dla studentów studiów inżynierskich, szczególnie kierunku *mechanika i budowa maszyn*, jak również kierunków pokrewnych prowadzonych na wydziałach mechanicznych w Polsce. Obok prezentacji ważniejszych schematów zniszczenia konstrukcji mechanicznych pragniemy także zwrócić uwagę na kilka niezbyt rozpowszechnionych metod doświadczalnej analizy konstrukcji, które uważamy za ważne mimo ciągłego rozwoju numerycznych metod obliczeniowych, również tu zaprezentowanych. Dobrze zaplanowane badania doświadczalne ciągle stanowią i zapewne będą nadal stanowić ważny weryfikator obliczeń nie tylko analitycznych, ale przede wszystkim numerycznych, co staraliśmy się wykazać na podanych przykładach.

Redaktorzy

Dr hab. inż. Stefan Bućko, em. prof. PK

Dr inż. Agnieszka Chojnacka-Brożek

Dr hab. inż. Grzegorz Milewski, prof. PK

## PODZIĘKOWANIE

Redaktorzy pragną serdecznie podziękować dr. inż. Henrykowi Jodłowskiemu oraz dr. inż. Marcinowi Trzebickiemu za istotny wkład w przygotowanie podręcznika.

## ROZDZIAŁ 1

# PODSTAWOWE PROBLEMY STATYCZNEJ PRÓBY ROZCIĄGANIA W ŚWIETLE NORMY PN-EN ISO 6892-1 (ORAZ NORM WCZEŚNIEJSZYCH I NOWYCH BADAŃ)

Stefan BUĆKO, Agnieszka CHOJNACKA-BROŻEK, Henryk JODŁOWSKI

### 1.1. WPROWADZENIE

Biorąc pod uwagę możliwość realizacji „jednoosiowego rozciągania” w prawie dokładnie czystej postaci, próby rozciągania są stosunkowo często stosowane zarówno w badaniach naukowych, jak i w badaniach właściwości mechanicznych materiałów, a w szczególności metali, do celów przemysłowych.

Próby rozciągania można podzielić na trzy kategorie w zależności od charakteru przebiegu zmian obciążenia badanej próbki w czasie, a mianowicie:

- a. Statyczne próby rozciągania.
- b. Dynamiczne próby rozciągania.
- c. Próby zmęczeniowe obejmujące rozciąganie bądź rozciąganie przemiennie ze ściskaniem.

Statyczna próba rozciągania przewidująca powolny regularny wzrost siły obciążającej w czasie jest najbardziej rozpowszechniona i posiada najstarszą tradycję. Powolny regularny wzrost siły ułatwia obserwację zjawisk zachodzących w materiale badanej próbki.

Wyniki statycznej próby rozciągania prowadzonej zgodnie z ww. normą (podobnie jak z poprzednio obowiązującą w kraju normą PN-91/H-04310) określają takie wartości, jak np.: wyraźna lub umowna granica plastyczności, wytrzymałość na rozciąganie oraz wydłużenie względne świadczące o zdolności materiału do odkształceń plastycznych są **podstawą do klasyfikacji materiałów konstrukcyjnych, w tym głównie metali.**

#### **Ad a. Statyczna próba rozciągania – najważniejsze zalety**

- możliwość uzyskania jednoosiowego i jednorodnego (formalnie) pola naprężeń w części pomiarowej badanej próbki w stosunkowo dużym zakresie obciążeń,
- możliwość stosunkowo łatwego wyznaczenia szeregu wielkości charakteryzujących właściwości mechaniczne metali i innych materiałów,

- możliwość obserwacji przebiegu procesu rozciągania od początku obciążenia aż do zniszczenia próbki,
- łatwość przeprowadzenia próby oraz powszechna dostępność maszyn i urządzeń do pomiaru sił i odkształceń,
- istotne znaczenie ma brak zakłóceń wywołanych siłami bezwładności, co wynika z małych prędkości posuwów elementów maszyny wytrzymałościowej.

Znaczenie statycznej próby rozciągania wynika także z faktu wyznaczania w tej próbie wartości naprężeń charakteryzujących przydatność materiałów konstrukcyjnych, jak np. granica plastyczności wyraźna lub umowna, wytrzymałość na rozciąganie oraz wydłużenie względne świadczące o zdolności materiału do odkształceń plastycznych.

### **Ad b. Dynamiczne próby rozciągania**

Podstawowymi cechami prób dynamicznych są duże prędkości przyrostu sił obciążających oraz duże prędkości przyrostu odkształceń próbki. Stosowane duże prędkości odkształceń generują znaczne siły bezwładności komplikujące konstrukcję maszyn do tych badań.

W zależności od zakładanych prędkości odkształceń w badaniach dynamicznych stosowane są różne rodzaje maszyn:

- przy prędkościach do około 10 [m/s] są to zwykle młoty udarowe,
- przy prędkościach do 100 [m/s] stosuje się najczęściej młoty rotacyjne,
- przy prędkościach większych wykorzystuje się napędy pneumatyczne lub materiały miotające pozwalające uzyskiwać prędkości nawet powyżej 1000 [m/s].

Istotnymi trudnościami w przygotowaniu badań dynamicznych są problemy z konstrukcją uchwytów (siły bezwładności) oraz konstrukcją układów pomiarowych sił i przemieszczeń. Dynamiczne próby rozciągania nie są przedmiotem rozważań normy PN-EN ISO 6892-1.

### **Ad c. Próby zmęczeniowe**

Badania zmęczeniowe służą wyznaczeniu odporności materiałów i elementów konstrukcyjnych na działanie naprężeń cyklicznie zmiennych w czasie. Badania polegają na wielokrotnym powtarzaniu obciążeń aż do zniszczenia badanej próbki. Badania zmęczeniowe cechują się stosunkowo dużym rozrzutem wyników, narzucającym konieczność wykonywania badań dla wielu próbek oraz konieczność statystycznego opracowywania wyników. Badania zmęczeniowe są również czasochłonne wobec wymaganej granicznej liczby cykli na poziomie  $>10^7$  cykli. Ze względu na problemy wynikające z sił bezwładności ograniczających częstotliwość zmian obciążeń w badaniach dla przypadków osiowych (rozciąganie i ściskanie), badania te są szczególnie czasochłonne wskutek ograniczeń częstotliwości wynikających z sił bezwładności pochodzących od uchwytów próbek. Znacznie częściej stosowane są badania zmęczeniowe w przypadku zginania narzucające mniejsze ograniczenia w zakresie częstości cykli obciążenia.



## 1.2. SCHEMAT STATYCZNEJ PRÓBY ROZCIĄGANIA

Statyczną próbę rozciągania przeprowadza się najczęściej przy zastosowaniu próbek, których kształt i wymiary zależą od kształtu i wymiarów wyrobów metalowych, z których są pobierane. Próbkę do badań zazwyczaj wykonuje się przez obróbkę mechaniczną odcinka próbnego pobranego z wyrobu. Wyroby o niezmiennym przekroju poprzecznym (kształtowniki, pręty, druty itp.) i próbki odlane do badań (np. z żeliwa, metali nieżelaznych itp.) mogą być badane bez obróbki mechanicznej – dotyczy to również próbek wyciętych z prętów przeciąganych, których nie należy obrabiać mechanicznie, ponieważ warstwa przypowierzchniowa posiada wyższe własności mechaniczne i stanowi o wytrzymałości elementu, co jest jednym z ważnych efektów operacji przeciągania. Dla przykładu druty wykorzystywane do wytwarzania lin nośnych maszyn wyciągowych w kopalniach wytwarzane przez przeciąganie osiągają wytrzymałość powyżej 2500 [MPa], gdy inne specjalne elementy wytwarzane z podobnej stali innymi metodami osiągają wytrzymałość o połowę mniejszą.

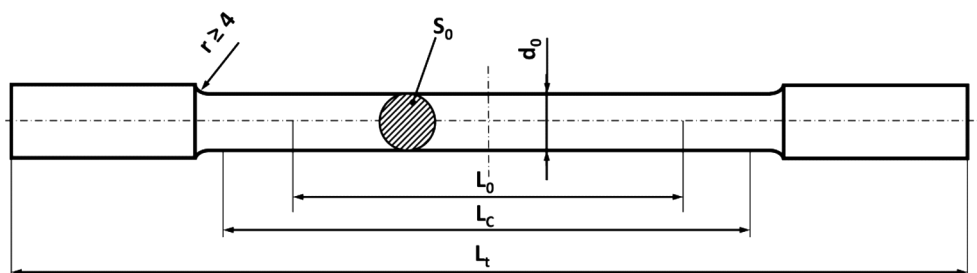
Przekrój poprzeczny próbek do badań oprócz typowych przekrojów regularnych, jak okrągły, prostokątny itp., może mieć także dowolny inny kształt. Jednorodnie i jednoosiowo pole naprężeń w części pomiarowej próbki osiąga się przez wykonanie jej o dostatecznie dużej długości. Tym samym ogranicza się wpływ części chwytowej próbki na zaburzenie stanu naprężeń w części pomiarowej próbki (zgodnie z zasadą de Saint-Venanta). Na ogół część chwytowa próbki posiada większy wymiar poprzeczny od części pomiarowej próbki.

Próbki do badań (rys. 1.1), których początkowa długość pomiarowa  $L_0$  jest związana z początkowym polem powierzchni przekroju poprzecznego  $S_0$  zależnością:

$$L_0 = k \cdot \sqrt{S_0} \quad (1.1)$$

określa się jako proporcjonalne.

Ogólnie przyjęto w Europie zalecenie, aby wartość  $k$  wynosiła **5,65**, co dla próbek o przekroju kołowym oznacza, że  $L_0 = 5 \cdot d_0$  (tzw. próbka pięciokrotna), gdzie  $d_0$  to średnica części pomiarowej próbki. Początkowa długość pomiarowa próbki nie może być jednak mniejsza od 20 mm. Dla małych przekrojów próbek, gdzie wymagania te nie jest spełnione, zaleca się przyjęcie wartości współczynnika  $k$  równej **11,3** (odpowiada to próbce dziesięciokrotnej) lub zastosowanie do badań próbki nieproporcjonalnej. Związanie długości początkowej bazy pomiarowej próbki, z polem jej przekroju poprzecznego, w próbkach proporcjonalnych podyktowane jest spełnieniem wymagań do zachowania możliwości porównywania odkształceń po zerwaniu próbek dla różnych metali oraz próbek pobranych w różnych miejscach wyrobu. (Np. wydłużenia trwałe po zerwaniu dla próbek pięcio- oraz dziesięciokrotnych zawsze spełniały zależność  $A_5 > A_{10}$  oznaczenia wg PN-91/H-04310). **Wykazano mianowicie, że zachowanie możliwości porównywania odkształceń po zerwaniu próbek wymaga zachowania w nich stałej wartości parametru  $k$ .**



Rys. 1.1. Próbką do uchwytów szcękowych o przekroju poprzecznym okrągłym do próby rozciągania;  $L_0$  – długość pomiarowa początkowa,  $L_c$  – długość części równoległej,  $L_t$  – długość całkowita próbki do badań,  $d_0$  – początkowa średnica części równoległej,  $S_0$  – początkowe pole przekroju poprzecznego części równoległej próbki

Powyższy warunek można zapisać w uogólnionej postaci:

$$\frac{L_{01}}{\sqrt{S_{01}}} = \frac{L_{02}}{\sqrt{S_{02}}} = \dots = \frac{L_{0n}}{\sqrt{S_{0n}}} = k = \text{const} \quad (1.2)$$

W nieproporcjonalnych próbkach do badań początkową długość pomiarową  $L_0$  przyjmuje się niezależnie od pola początkowego przekroju poprzecznego  $S_0$ . W opracowaniu wyników próby konieczna jest znajomość długości jeszcze kilku dodatkowych parametrów dotyczących długości badanej próbki:

$L_0$  – długość pomiarowa początkowa,

$L_c$  – długość części równoległej próbki,

$L_e$  – długość pomiarowa ekstensometru,

$L_u$  – długość pomiarowa końcowa po rozerwaniu.

Przytoczony powyżej zestaw wymiarów początkowych długości próbek do próby rozciągania nie wyczerpuje pełnego kompletu przewidzianego nową normą, a tylko ważniejsze parametry.

Tak przygotowaną próbkę poddaje się działaniu osiowej siły rozciągającej  $F$  w maszynie wytrzymałościowej (rys. 1.2). W procesie obciążania uzyskuje się w części pomiarowej badanej próbki jednorodny (formalnie) stan czystego rozciągania, przy czym naprężenie najczęściej oblicza się jako iloraz:

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad (1.3)$$

gdzie:

$F$  – siła obciążająca,

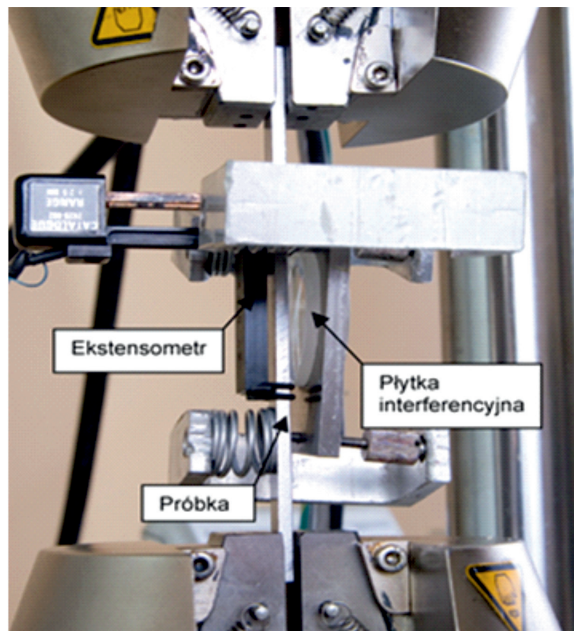
$S_0$  – pierwotny przekrój poprzeczny.

Naprężenie określone zależnością (1.3) nie jest naprężeniem rzeczywistym w części pomiarowej próbki, gdyż przekrój próbki maleje w czasie próby rozciągania. Tak zdefiniowane naprężenie nazywane było (według PN-91/H-04310) „**naprężeniem pozornym**” i oznaczane zazwyczaj literą  $R$ . W myśl aktualnej normy

PN-EN ISO 6892-1 (jak również normy poprzedniej) takie naprężenie oznaczane jest literą  $R$  i nazywane wprost **naprężeniem** oraz **obliczane wzorem**:

$$R = \frac{F}{S_0} [\text{MPa}] \quad (1.3a)$$

Do wystąpienia pierwszych odkształceń plastycznych różnice między naprężeniem pozornym i rzeczywistym w części pomiarowej próbki (uwzględniającym zmniejszenie przekroju próbki) są bardzo małe. Warto tutaj zauważyć, że w ogromnej większości obliczeń wytrzymałościowych konstrukcji operuje się naprężeniami pozornymi, co oznacza pomijanie wpływu odkształceń sprężystych na pola przekrojów poprzecznych obliczanych elementów konstrukcji; wymiary obliczeniowe odpowiadają zatem wymiarom rysunkowym. Jest to niewątpliwie argument na rzecz stosowania w praktyce obliczeniowej oraz badaniach doświadczalnych naprężeń **pozornych**. W warunkach bezpieczeństwa porównuje się zatem wartości naprężeń wyznaczane doświadczalnie oraz analitycznie przy zachowaniu tej samej zasady wyznaczania. Powyższe uwagi nie dotyczą oczywiście materiałów wykazujących zdolność do dużych odkształceń, przy których występują duże zmiany wymiarów przekrojów.



Rys. 1.2. Fragment maszyny wytrzymałościowej z próbką, ekstensometrem i płytką interferencyjną

Obciążenie próbki siłą osiową  $F$  powoduje wydłużenie bazy pomiarowej próbki  $L_0$  o  $\Delta L$ . Do celów porównawczych znacznie wygodniejszą miarą wydłużenia jest tak zwane „wydłużenie względne” w myśl nowej normy „wydłużenie-odkształce-

nie-ekstensometryczne” oznaczane jako „ $e$ ”, potocznie nazywane „inżynierskim”, lub „odkształcenie wzdłużne” najczęściej wyznaczane, dla małych odkształceń, w myśl definicji Cauchy’ego (podobnie jak wydłużenie „ $e$ ” – wyznaczone obecnie w %) i oznaczane dawniej przez „ $\varepsilon$ ” oraz obliczane wzorem (1.4):

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (1.4)$$

gdzie:

$\Delta L$  – wydłużenie bazy pomiarowej oraz

$L_0$  – pierwotna długość bazy pomiarowej.

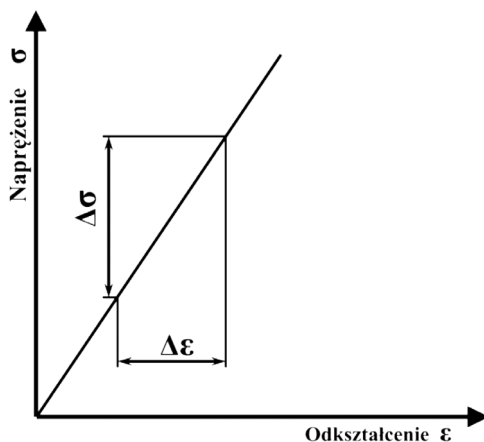
$$e = \frac{\Delta L_c}{L_c} \cdot 100\% \quad (1.4a)$$

$L_c$  – długość pomiarowa ekstensometru.

Z początkowo liniowej zależności  $F = \varphi(\Delta L)$  ( $F - \Delta L$  czy też  $\sigma - \varepsilon$  lub  $R - e$ ) bądź  $\sigma = f(\varepsilon)$  można obliczyć tzw. pierwszą stałą sprężystą materiału, inaczej „**moduł sprężystości podłużnej**”, zwany dość powszechnie w literaturze światowej „**modułem Younga**”, jako:

$$E = \frac{\Delta \sigma}{\Delta \varepsilon} \text{ lub } E = \frac{\Delta R}{\Delta e} \cdot 100\% \quad (1.5)$$

gdzie:  $\Delta \sigma \equiv \Delta R$ , natomiast  $\Delta e$  w %.



Rys. 1.3. Wyznaczanie modułu sprężystości podłużnej  $E$  z wykresu rozciągania

W zakresie odkształceń sprężystych (tj. odwracalnych) dla liniowej zależności  $\sigma - \varepsilon$  (rys. 1.3) obowiązuje (najczęściej) tzw. **prawo Hooke’a**:

„**W pewnym zakresie przyrosty wartości naprężeń są proporcjonalne do odpowiadających im przyrostów wartości odkształceń**”; według związku (1.6):

$$\Delta R = E \cdot \Delta e \text{ wg aktualnej normy lub wcześniej } \Delta \sigma = E \cdot \Delta \varepsilon \quad (1.6)$$

Wartość stałej  $E$  [MPa] charakteryzuje jednostkowy opór materiału przeciw odkształceniu wzdłużnemu. Metale mają swoje charakterystyczne wartości modułu Younga i jest to stała materiałowa nazywana często pierwszą stałą sprężystą. Przykładowo wartości modułu **Younga** dla kilku popularnych metali wynoszą: dla stali:  $E \cong 2 \cdot 10^2$  [GPa], dla stopów aluminium:  $E \cong 0,8 \cdot 10^2$  [GPa], dla żeliw szarych:  $E \cong 1 \cdot 10^2$  [GPa], dla stopów tytanu:  $E \cong 1 \cdot 10^2$  [GPa] (należy zwrócić uwagę, że przytoczone wartości modułu  $E$  są wartościami orientacyjnymi, podobnie jak wartości podawane w większości źródeł drukowanych, np. tablic bądź podręczników).

Przy wzroście siły rozciągającej w zakresie odkształceń liniowo sprężystych zwiększaniu odkształcenia podłużnego próbki proporcjonalnie do naprężenia towarzyszy zmniejszenie wymiarów poprzecznych próbki, które – odniesione do wymiarów początkowych – definiuje odkształcenie poprzeczne  $\varepsilon_p$  w myśl nowych oznaczeń  $e_p$ .

Stosunek odkształcenia poprzecznego  $\varepsilon_p$  do odkształcenia wzdłużnego  $\varepsilon$  w zakresie obowiązywania prawa Hooke'a uważa się za stały. Bezwzględna wartość tego stosunku nazywana jest **drugą stałą materiałową**, a częściej stałą, liczbą lub **współczynnikiem Poissona** i oznaczana jest jako  $\nu$  (ni) oraz definiowana w myśl zależności:

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon} \right| \text{ lub inaczej: } \varepsilon_p = -\nu \cdot \varepsilon \text{ lub } \nu = \left| \frac{e_p}{e} \right| \text{ lub inaczej: } e_p = -\nu \cdot e \quad (1.7)$$

Teoretyczna wartość  $\nu$  zawarta jest w przedziale  $(0 \div 0,5)$ ; przy czym  $\nu = 0$  oznacza materiał, który nie zmienia swoich wymiarów poprzecznych przy jednoosiowym stanie naprężenia. Takim materiałem jest np. korek używany do zamykania butelek z winem, dla którego rzeczywista wartość  $\nu = 0,03$ . Wartość  $\nu = 0,5$  oznacza materiał nieściśliwy, tj. niezmienny swojej objętości w procesie obciążania. Tego typu umowne modele materiałów są bardzo chętnie przyjmowane w teorii plastyczności i teorii przeróbki plastycznej, gdyż można przyjąć, że objętość takiego materiału w procesie przeróbki plastycznej jest stała. Takie założenie istotnie upraszcza rozwiązanie układów równań opisujących proces odkształceń plastycznych. Badania wykazały, że ze wzrostem odkształceń plastycznych wartość współczynnika Poissona zbliża się do 0,5, tj.  $\nu \rightarrow 0,5$ , co wykazano w pracy [9]. Dla większości metali można zakładać w zakresie odkształceń sprężystych wartość  $\nu \cong 0,3$ .

Dla ciał izotropowych na podstawie znanej wartości modułu Younga oraz stałej Poissona można wyznaczyć wartość modułu sprężystości poprzecznej  $G$  zwanego często w literaturze **modułem Kirchhoffa** wg związku:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1.8)$$

W niektórych analizach teoretycznych wykorzystywany bywa również moduł sprężystości objętościowej, zwany także **modułem ściśliwości**, określony zależnością:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad (1.9)$$

Powyżej zdefiniowano cztery stałe (z czego dwie niezależne), które można ogólnie opisać jako trzy moduły, tj.: moduł Younga –  $E$ , moduł Kirchhoffa –  $G$ , moduł ściśliwości –  $K$  oraz współczynnik Poissona –  $\nu$ .

Wyznaczanie powyższych stałych uzasadnione jest ich przydatnością do doświadczalnej analizy konstrukcji, która mimo rozwoju metod komputerowych ciągle odgrywa istotną rolę w analizie i ocenie bezpieczeństwa ważnych konstrukcji. W aktualnym stanie wiedzy ciągle nie opracowano doświadczalnych metod określenia/pomiaru naprężeń wystarczająco wiarygodnych i dokładnych. Doświadczalna weryfikacja bezpieczeństwa konstrukcji polega zatem na pomiarze odkształceń oraz przemieszczeń, a następnie przez wykorzystanie związków naprężeniowo-odkształceniowych (najczęściej prawa Hooke’a oraz równań teorii sprężystości) wyznacza się wartości naprężeń w badanej konstrukcji. Często przy obliczeniu naprężeń i sprawdzeniu stopnia bezpieczeństwa analizowanej konstrukcji korzysta się przykładowo z zależności przytoczonej poniżej z oznaczeniami stosowanymi powszechnie w wytrzymałości materiałów:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \quad (1.10)$$

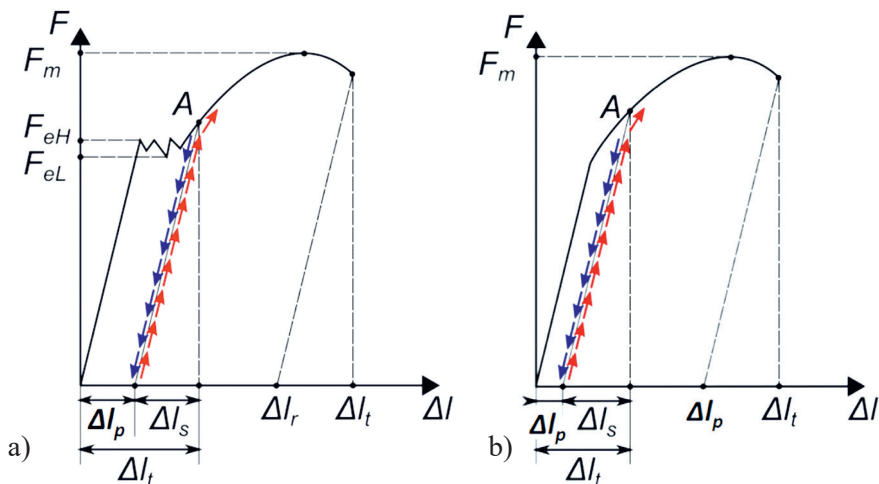
### 1.3. KRÓTKIE CHARAKTERYSTYKI REAKCJI STALI NA WZRATAJĄCE OBCIĄŻENIE

Wzrost siły obciążającej próbkę powoduje wzrost naprężenia  $R$  oraz wzrost wydłużenia próbki. W pierwszej fazie procesu rozciągania dla znaczącej większości metali zależność między przyrostem naprężenia i przyrostem odkształcenia jest liniowa lub quasi-liniowa, co potwierdza obowiązywanie prawa Hooke’a. Wykres zależności przyrostu wydłużenia od przyrostu siły obciążającej jest linią prostą lub bardzo zbliżoną do linii prostej. W obliczeniach technicznych w tym zakresie obciążeń wykres rozciągania przyjmuje się najczęściej jako prostoliniowy, uznając tym samym ważność prawa Hooke’a. Tylko stosunkowo nieliczna grupa metali wykazuje prostoliniowość aż do zerwania; są to tzw. materiały kruche. Warto tutaj zauważyć, że rozwój technologii wytwarzania materiałów metalowych, np. żeliw, powoduje istotne ograniczenie liczby metali klasycznie kruchych.

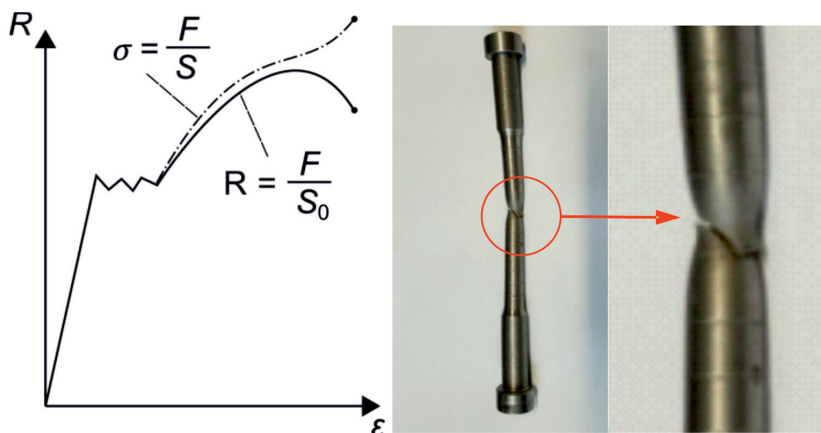
Znacząca większość metali, w tym głównie stali, stosowanych w technice wykazuje zdolność do odkształceń plastycznych, tj. nieodwracalnych. Pojawienie się odkształceń plastycznych sygnalizowane jest na wykresie rozciągania zakrzywie-

niem przebiegu linii. Przerwanie procesu obciążania i wykonanie operacji odciążania, w strefie zakrzywionej wykresu, wykaże wystąpienie odkształceń **nieodwracalnych**, czyli inaczej określając „**plastycznych**”. Wystąpienie odkształceń plastycznych w elemencie konstrukcyjnym jest ważnym sygnałem wskazującym na możliwość przekroczenia obciążenia dopuszczalnego i może ewentualnie pozwolić obsłudze na odciążenie konstrukcji przed jej całkowitym zniszczeniem.

Na rys. 1.4 pokazano typowe wykresy rozciągania stali z wyraźną granicą plastyczności (1.4a) oraz bez wyraźnej granicy plastyczności (1.4b), z przebiegiem procesów odciążania oraz przebiegiem procesu kontynuacji obciążania po odciążeniu, dla tej samej próbki.



Rys. 1.4. Wykresy rozciągania stali: a) z wyraźną granicą plastyczności; b) bez wyraźnej granicy plastyczności. Linie przerywane ze strzałkami pokazują przebieg wykresu po operacji odciążania oraz przy ponownym obciążaniu



Rys. 1.5. Wykresy naprężeń pozornych (ciągły) i naprężeń rzeczywistych (przerywany) oraz obraz zerwanej próbki pięciokrotnej z widoczną szyjką



Wykres na rys. 1.4a odpowiada zachowaniu stali zarówno węglowych, jak też niskostopowych, tzw. konstrukcyjnych, z reguły cechujących się dobrą spawalnością, a często również dobrą odpornością na kruche pękanie. Stale te określane są jako wykazujące tzw. niestateczność materiałową i z powodu wymienionych wcześniej cech stosowane są często na konstrukcje wielkogabarytowe oraz ogólnie na konstrukcje spawane.

Część prostoliniowa wykresu rozciągania dla tych stali kończy się jego załamaniem, a siła – przy której to zachodzi – nazywana jest siłą odpowiadającą „górną granicą plastyczności”. Dokładne badania procesu odkształceń plastycznych (omówione skrótowo w końcowej części rozdziału) wykazały, że zakrzywienie to związane jest z naturą przebiegu odkształceń plastycznych tych materiałów, czyli wystąpieniem tzw. „poślizgów plastycznych”.

Jako zasadę przyjmuje się, że do osiągnięcia  $F_{\text{ch}}$  odkształcenia są sprężyste, zatem  $R_{\text{ch}}$  (górną granicą plastyczności) jest równocześnie „granica sprężystości” materiału. Kontynuacja obciążenia prowadzi do istotnych przyrostów wydłużenia próbki przy równoczesnych niewielkich wahaniami siły obciążającej próbkę. Ten odcinek wykresu nazywany bywa często „platformą plastyczną”. Dokładny opis zjawisk zachodzących na platformie plastycznej można znaleźć w pracach od [1] do [7], a opis skrócony na końcu rozdziału. Dokładny przebieg procesów na platformie plastycznej pokazuje film załączony do pracy [7]. Długość platformy plastycznej jest cechą charakterystyczną gatunku stali i sposobu obróbki. Po osiągnięciu pewnego wydłużenia następuje wzrost siły przy wyraźnie mniejszych przyrostach wydłużenia – jest to efekt często nazywany „wzmocnieniem plastycznym”. Towarzyszy temu już widoczne, choć nadal równomierne, zmniejszanie wymiaru przekroju poprzecznego próbki. Na rys. 1.4a pokazano efekty towarzyszące odciążaniu próbki od pkt. A, ze wskazaniem odkształceń sprężystych oraz plastycznych. Pokazano również przebieg zależności naprężeń i odkształceń przy ponownym obciążaniu tej samej próbki – linia przerywana, która jest praktycznie równoległa do przebiegu wykresu przy pierwszym cyklu obciążenia. Ważną cechą tych materiałów jest brak wyraźnej granicy plastyczności przy ponownym obciążeniu. Ponowne wystąpienie wyraźnej granicy plastyczności jest możliwe dopiero po przeprowadzeniu operacji wyżarzania odciążonej próbki.

Podobny przebieg procesu odciążania oraz ponownego obciążania pokazano na rys. 1.4b. Dla stali o wykresie jak na rys. 1.4b nie występuje efekt załamania wykresu, lecz monotoniczny wzrost wydłużenia towarzyszący przyrostowi siły rozciągającej. Dla takich materiałów nie odnotowujemy tzw. wyraźnej granicy plastyczności. Nie ma podstaw do dyskusji problemu odtwarzania wyraźnej granicy plastyczności wobec jej braku w procesie pierwszego obciążania. W obu przypadkach odciążanie przebiega wzdłuż prostej równoległej do prostoliniowej części wykresu rozciągania.

Punktem charakterystycznym próby rozciągania jest maksimum siły obciążającej, któremu towarzyszy, dla obu typów stali, początek tworzenia się szyjki, czyli przewężenia w części pomiarowej próbki.



Przy dalszym obciążaniu obserwuje się wzrost wydłużenia próbki przy sile malejącej aż do zerwania. To zjawisko jest skutkiem bardzo szybkiego zmniejszania się przekroju próbki w szyjce, które wyprzedza umocnienie materiału w strefie szyjki. Na rys. 1.5a pokazano przebiegi zmian naprężeń pozornych ( $R$ ) oraz rzeczywistych  $\sigma = \frac{F}{S}$ , które wskazują na ciągły wzrost naprężeń rzeczywistych w szyjce aż do zerwania próbki. Przebieg wykresów naprężeń pozornych i rzeczywistych potwierdza wcześniejszy wniosek o ciągłym umocnieniu materiału w procesie obciążania.

Rysunek 1.4b przedstawia wykres rozciągania stali niewykazującej wyraźnej granicy plastyczności, ale wykazującej zdolność do odkształceń plastycznych. Przejście prostoliniowej części wykresu (sprężystej) do części wykazującej rosnące odkształcenia plastyczne (plastyczne umocnienie materiału) przebiega łagodnie. Wyróżnienie punktu kończącego odcinek prostoliniowy jest w sposób ścisły praktycznie niemożliwe. Dla takich materiałów niemożliwe jest dokładne wyznaczenie „granicy sprężystości”; można to zrobić metodą odciążania w sposób przybliżony. Wyznaczenie granicy sprężystości z większą dokładnością metodą odciążania przebiega wg schematu: przez obciążanie i odciążanie próbki znajduje się dwie wartości sił, z których mniejsza nie wywołała odkształceń trwałych, a następna, większa, takie odkształcenia spowodowała. Siła odpowiadająca rzeczywistej granicy sprężystości zawarta jest wewnątrz tego przedziału wartości sił. Dla stali i innych metali o takich wykresach wyznacza się wartości naprężeń (tzw. granic plastyczności) przy umownych wartościach odkształceń trwałych, odkształceń nieproporcjonalnych oraz odkształceń całkowitych. **Najczęściej zalecane wartości wymienionych wyżej odkształceń przy wyznaczaniu umownych granic plastyczności to: 0,02%, 0,05%, 0,2% oraz 0,5% długości pierwotnej części pomiarowej próbki.** Należy podkreślić, że przebieg wykresów naprężeń pozornych i rzeczywistych w zakresie odkształceń plastycznych jest podobny do pokazanego na rys. 1.5a. Takie materiały wykazują z reguły znacznie większe wartości umownych granic plastyczności oraz mniejsze wydłużenie po zerwaniu. W znaczącej liczbie takie stale mogą podlegać obróbce cieplno-chemicznej, po której uzyskuje się duży przyrost wytrzymałości i „granicy plastyczności”, oczywiście umownej, ale bez istotnej zmiany wartości modułu Younga, oraz zazwyczaj obniżenie wartości wydłużenia względnego po zerwaniu.

Wykresu rozciągania materiału kruchego nie przedstawiono, gdyż jest to odcinek linii prostej o kącie nachylenia wynikającym z wartości modułu Younga. Punkt końcowy wykresu określa wartość siły maksymalnej  $F_m$ , z której wynika wytrzymałość na rozciąganie:

$$R_m = \frac{F_m}{S_0} [\text{MPa}] \quad (1.11)$$

W przypadku rozciągania próbek z materiałów kruchych nie występują wyraźne efekty przewężenia w strefie pęknięcia próbki.

## 1.4. CHARAKTERYSTYCZNE NAPRĘŻENIA WYZNACZANE WG OBU OMAWIANYCH NORM

### Podstawowe naprężenia wyznaczone wg normy PN-91/H-04310

- $R_m = F_m/S_0$  [MPa], gdzie  $F_m$  – maksymalna siła w czasie próby.
- $R_{eH} = F_{eH}/S_0$  [MPa], gdzie  $F_{eH}$  – siła przy pierwszym załamaniu wykresu rozciągania, odpowiadająca górnej granicy plastyczności, równocześnie granica sprężystości.
- $R_{eL} = F_{eL}/S_0$  [MPa], gdzie  $F_{eL}$  – minimalna wartość siły z pominięciem pierwszego minimum po załamaniu wykresu, odpowiada dolnej granicy plastyczności.
- $R_{0,05} = F_{0,05}/S_0$  [MPa], umowna granica plastyczności przy wydłużeniu trwałym 0,05%.
- $R_{0,2} = F_{0,2}/S_0$  [MPa], umowna granica plastyczności przy wydłużeniu trwałym 0,2%, tzw. „umowna granica plastyczności”.
- Wielkość  $R_m$  była jedynym naprężeniem charakterystycznym, wyznaczanym dla materiałów kruchych.

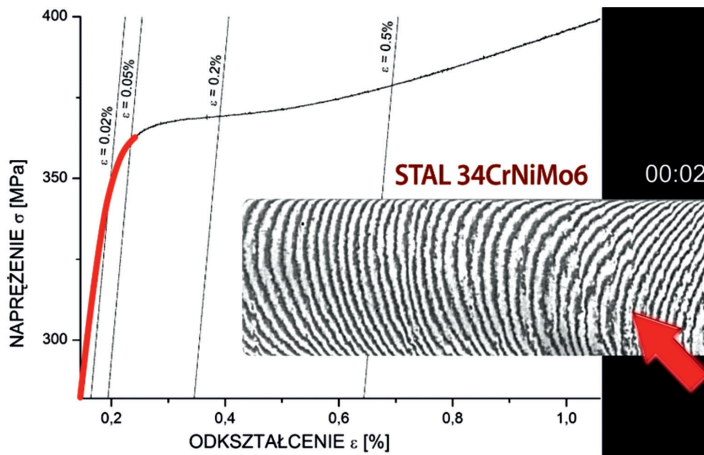
### Podstawowe naprężenia wyznaczone wg normy PN-EN ISO 6892-1

- Norma definiuje oznaczenie naprężenia  $R = F/S_0$  i nazwę bez przymiotnika „po-zorne”.
- Norma definiuje pojęcia górnej i dolnej granicy plastyczności.
- $R_{eH} = F_{eH}/S_0$  [MPa], gdzie  $F_{eH}$  – siła przy pierwszym załamaniu wykresu rozciągania, odpowiadająca górnej granicy plastyczności, równocześnie granica sprężystości.
- $R_{eL} = F_{eL}/S_0$  [MPa], gdzie  $F_{eL}$  – minimalna wartość siły z pominięciem pierwszego minimum po załamaniu wykresu, odpowiadająca dolnej granicy plastyczności.
- Norma nie definiuje granicy sprężystości i nie wymaga jej wyznaczania, wymienia natomiast kilka wartości umownej granicy plastyczności:
  - $R_p$  – umowna granica plastyczności, wydłużenie ekstensometryczne plastyczne.
  - $R_r$  – umowne naprężenie graniczne przy wydłużeniu trwałym.
  - $R_t$  – umowna granica plastyczności, wydłużenie ekstensometryczne całkowite.
- Norma PN-EN ISO 6892-1 utrzymuje zarówno definicję, jak również oznaczenie:
  - $R_m$  – wytrzymałość na rozciąganie.

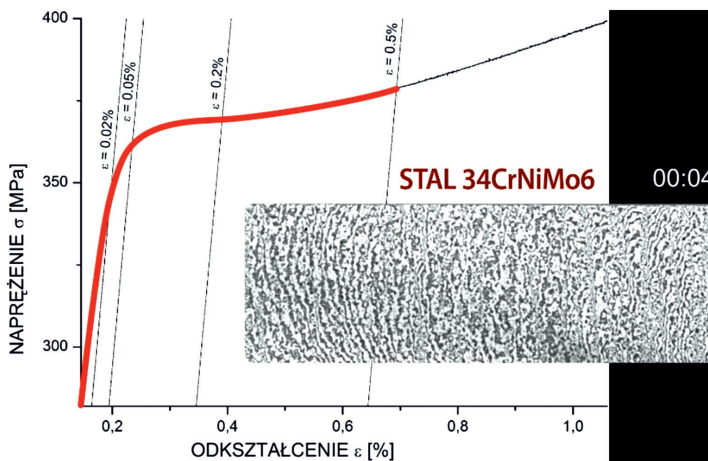
Sposoby wyznaczania dwóch spośród naprężeń charakterystycznych, tj. umownych granic plastyczności, przy wydłużeniu trwałym wg PN-91/H-04310 oraz przy wydłużeniu trwałym wg PN-EN 10002-1 są różne. Mianowicie wyznaczenie naprężenia przy umownym wydłużeniu trwałym (wydłużenie trwałe nie musi odpowiadać wydłużeniu nieproporcjonalnemu) wg PN-EN10002-1 wymaga przeprowadzania operacji odciążania i przy jednej operacji dokładne wyznaczenie takiego naprężenia jest praktycznie niemożliwe.

Sposób wyznaczania „umownych granic plastyczności” przy wydłużeniach nieproporcjonalnych przedstawiono na rys. 1.6a oraz 1.6b, na przykładzie stali

34CrNiMo6 w stanie po normalizacji. Po obróbce cieplno-chemicznej wartości naprężeń charakterystycznych tej stali są prawie dwukrotnie większe i wykorzystanie metody interferencji optycznej dla ilustracji zasięgu stref plastycznych nie jest wówczas skuteczne. Zasady wykorzystywania interferencji optycznej do analizy procesu powstawania odkształceń plastycznych omówiono w dalszej części tego rozdziału. Na rys. 1.6a oraz 1.6b widoczne są również prążki interferencyjne wykorzystywane do rozpoznawania początku powstawania odkształceń plastycznych.



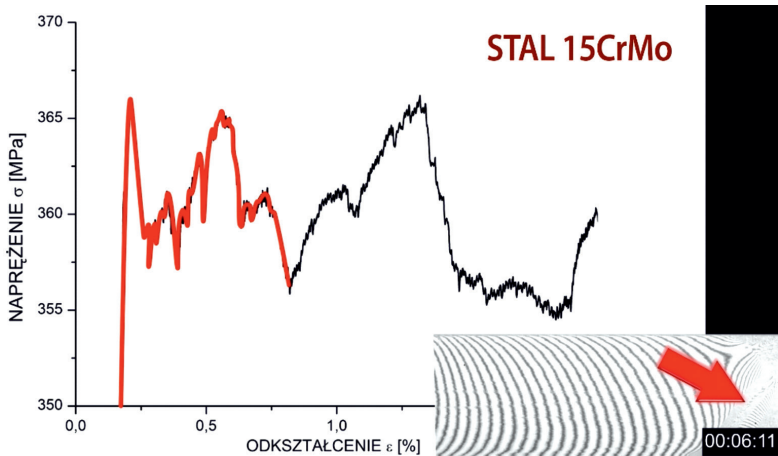
Rys. 1.6a. Fragment wykresu rozciągania stali 34CrNiMo6 w stanie po normalizacji wraz z obrazem prążków interferencyjnych dla umownych odkształceń nieproporcjonalnych 0,05% (koniec pogrubionej linii wykresu). Strzałka wskazuje pierwsze wyraźne deformacje prążków interferencyjnych wskazujących na występujące tam poślizgi (odkształcenia) plastyczne



Rys. 1.6b. Fragment wykresu rozciągania stali 34CrNiMo6 w stanie po normalizacji wraz z obrazem prążków interferencyjnych dla umownych odkształceń nieproporcjonalnych 0,5% (koniec pogrubionej linii wykresu). Na całym widocznym odcinku próbki widać wyraźne deformacje prążków interferencyjnych wskazujące na uplastycznienie całego widocznego odcinka próbki

Na rys.1.6a widoczny jest dość regularny układ prążków w znacznej części próbki (po lewej stronie), odpowiadający wydłużeniu nieproporcjonalnemu 0,05%, ze wskazaniem strzałką miejsca rozpoczynających się od strony prawej poślizgów plastycznych. Na rys. 1.6b, odpowiadającemu układowi prążków dla wydłużenia nieproporcjonalnego 0,5%, widoczna jest całkowita deformacja prążków oraz ich częściowe rozdrobnienie sygnalizujące odkształcenia plastyczne na całej długości widocznego odcinka próbki. Charakterystyczny jest rozwój strefy plastycznej wzdłuż długości próbki mimo jednorodnego pola naprężeń. Cyfry na czarnym pasku wskazują orientacyjny czas od początku próby w minutach.

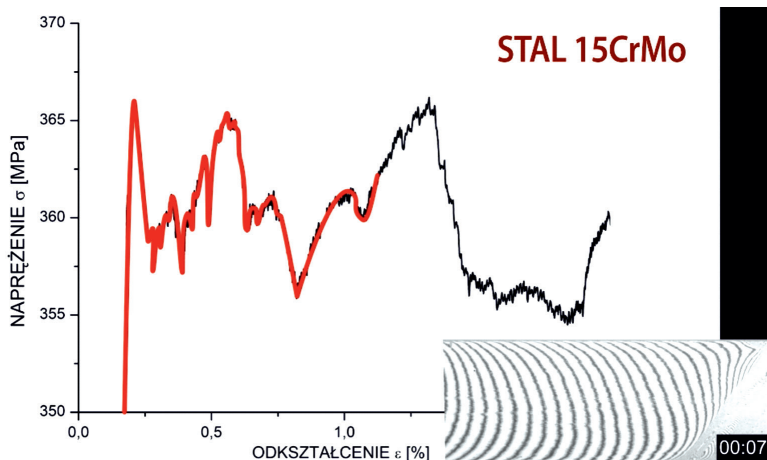
Rzeczywisty obraz bardzo dokładnego wykresu rozciągania materiału z niestatecznością materiałową w strefie platformy plastycznej pokazano na rys. 1.7a, 1.7b oraz 1.7c na przykładzie wykresu rozciągania miękkiej stali 15CrMo. Zjawiska występujące w badanej próbce są trudne do analizy ze względu na ich lokalną gwałtowność oraz złożoność procesów zachodzących w materiale o niejednorodnej ziarnistej strukturze. Analizy bazujące na założeniu, że badany materiał jest ośrodkiem ciągłym, jednorodnym i izotropowym, nie stwarzają szans na poprawną interpretację i wyjaśnienie przyczyn charakteru zachodzących zjawisk w chwili rozpoczęcia i w pierwszej fazie odkształceń plastycznych. Podobnie wykorzystywanie warunku plastyczności do oceny rzeczywistej inicjacji odkształceń plastycznych nie prowadzi do poprawnych rezultatów. Warunek plastyczności formułowany jest dla punktu, który jak wiadomo nie ma wymiarów, zatem poślizg plastyczny w punkcie wystąpić nie może. Ten problem został wyjaśniony w pracach zespołu Instytutu Mechaniki Stosowanej i obszernie opisany w pracy [7], podsumowującej wyniki Projektu Badawczego pt. *Rozwój doświadczalnej metody rozpoznawania makroodkształceń plastycznych w czynnym procesie obciążenia w materiałach wykazujących niestateczność*



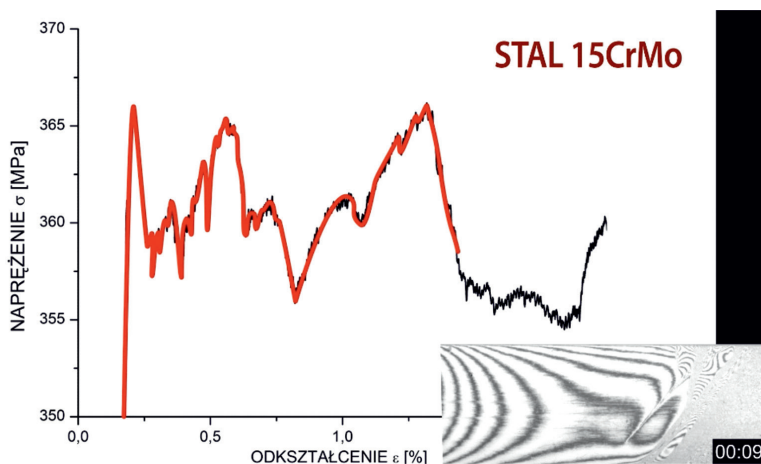
Rys. 1.7a. Obraz strefy plastycznej w próbce ze stali 15CrMo w stanie odpowiadającym końcowi pogrubionej linii wykresu (6:11 od rozpoczęcia próby). Strzałka wskazuje początek strefy poślizgów plastycznych, czyli początek strefy plastycznej

**materialową.** Wykazano tam jednoznacznie, że poślizgi plastyczne występują w przypadkowych miejscach próbki, a strefy plastyczne propagują się wzdłuż długości pomiarowej, co można zauważyć na filmie załączonym do pracy [7], a także na rys. 1.7a, 1.7b i 1.7c zamieszczonych poniżej oraz w pracach [5] i [6].

Na wspomnianych rysunkach pokazano również obrazy układów prążków interferencyjnych dla trzech punktów platformy plastycznej. Czas od początku próby jest podany orientacyjnie w minutach na czarnych paskach po prawej stronie rysunków.



Rys. 1.7b. Obraz strefy plastycznej w próbce ze stali 15CrMo w stanie odpowiadającym końcowi pogrubionej linii wykresu (ok. 7 min od rozpoczęcia próby). Początek strefy poślizgów plastycznych, czyli przebiegającą ukośnie do osi próbki granicę między strefą sprężystą (z prążkami) oraz strefą plastyczną bez prążków interferencyjnych, jest dość wyraźnie przesunięty w lewo



Rys. 1.7c. Obraz strefy plastycznej w próbce ze stali 15CrMo w stanie odpowiadającym końcowi pogrubionej linii wykresu (ok. 9 min od rozpoczęcia próby)

Początek strefy poślizgów plastycznych, czyli przebiegającą ukośnie do osi próbki granicę między strefą sprężystą (z prążkami) oraz strefą plastyczną bez prążków interferencyjnych, jest dość wyraźnie przesunięty w lewo w stosunku do położenia na rys. 1.7a oraz 1.7b. Dodatkowo widoczna jest istotna zmiana obrazu prążków w strefie sprężystej wskazująca na zbliżanie się kolejnych poślizgów.

We wspomnianych badaniach wykorzystywano efekty towarzyszące zjawisku interferencji optycznej, występującemu przy oświetlaniu światłem jednobarwnym wypolerowanej powierzchni metalu (próbki) przez półprzepuszczalne zwierciadło umieszczone bardzo blisko próbki, ale bez bezpośredniego kontaktu obu obiektów. W takim eksperymencie obserwuje się prążki interferencyjne stanowiące obraz poziomicy szczeliny między próbką oraz półprzepuszczalnym zwierciadłem. Odstęp między prążkami odpowiada połowie długości fali użytego światła.

Badania dr. H. Jodłowskiego wykazały, że wskutek odkształceń plastycznych materiału próbki, w tym przypadku poślizgów plastycznych, powierzchnia próbki ulega deformacji (deplanacji) i zamiast klasycznego odbicia promieni świetlnych, przepuszczonych przez zwierciadło półprzepuszczalne, od powierzchni próbki, następuje rozproszenie światła, co powoduje zanik zjawiska interferencji optycznej i w konsekwencji zanik prążków interferencyjnych w strefie wystąpienia odkształceń (poślizgów) plastycznych. W wymienionych wyżej pracach wykazano, że zanik prążków interferencyjnych jest sygnałem o wystąpieniu odkształceń (poślizgów) plastycznych. Wykazano również, że w rzeczywistych metalach poślizgi plastyczne w rozciąganych próbkach pojawiają się lokalnie w przypadkowych miejscach próbki. W rezultacie po rozpoczęciu procesu poślizgów plastycznych, mimo formalnie jednorodnego pola naprężeń w rozciąganej próbce, dość długo obserwuje się niejednorodne pole odkształceń, a mianowicie strefę sprężystą z prążkami interferencyjnymi, strefę plastyczną bez prążków interferencyjnych oraz strefę pośrednią, w której trwa proces zaniku prążków interferencyjnych, czyli odkształcenia plastyczne. Powyższe zjawisko pokazano na rys. 1.7a, 1.7b, 1.7c dla próbki ze stali 15CrMo.

W szerszym zakresie zastosowań metod interferencyjnych w mechanice konstrukcji na szczególną uwagę zasługuje wydana w ostatnich latach monografia P. Pyrzanowskiego [11], przedstawiająca przegląd współcześnie stosowanych metod pomiarowych w mechanice ciał odkształcalnych, w tym metod wykorzystujących optykę falową.

## 1.5. WIELKOŚCI CHARAKTERYZUJĄCE ZDOLNOŚĆ DO ODKSZTAŁCEŃ PLASTYCZNYCH

W statycznej próbie rozciągania metali oprócz charakterystycznych naprężeń omówionych i zdefiniowanych wcześniej wyznacza się także własności plastyczne materiału badanego. Są to wydłużenie względne po zerwaniu próbki oraz przewężenie.



Wydłużenie względne procentowe po zerwaniu  $A$ ; jest to trwały przyrost długości pomiarowej próbki po zerwaniu  $\Delta L$  wyrażony w procentach początkowej długości pomiarowej  $L_0$ .

Dla próbek proporcjonalnych, dla których  $k = 5,65$  (odpowiada to próbce pięciokrotnej), stosuje się oznaczenie literą  $A$  bez indeksu, który jest domyślnie przyjmowany jako równy **5,65**.

$$A = \frac{\Delta L}{L_0} \cdot 100\% \text{ dla } k = 5,65; \left( L_0 = 5,65\sqrt{S_0} \right) \quad (1.12a)$$

Dla innych próbek proporcjonalnych oznaczenie  $A$  należy opatrzyć indeksem, który jest wartością współczynnika proporcjonalności  $k$ .

$$A_k = \frac{\Delta L}{L_0} \cdot 100\% \text{ dla } k = \frac{L_0}{\sqrt{S_0}} \quad (1.12b)$$

Dla próbek nieproporcjonalnych oznaczenie  $A$  należy uzupełnić indeksem, który jest początkową długością pomiarową  $L_0$  wyrażoną w milimetrach, np.  $A_{L_0 \text{ mm}} = \dots$

Przewężenie procentowe  $Z$  jest to największa zmiana pola powierzchni przekroju poprzecznego w przewężeniu, po zerwaniu próbki, wyrażona w procentach początkowej powierzchni przekroju poprzecznego  $S_0$ .

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} \cdot 100\% \quad (1.13)$$

gdzie:

$S_u$  – najmniejszy przekrój po zerwaniu.

## 1.6. PODSUMOWANIE

Zamierzeniem autorów rozdziału było zwrócenie uwagi Czytelnika na kilka ważnych zjawisk oraz zależności występujących w procesie realizacji statycznej próby rozciągania metali.

Przyjęto założenie, że szczegółowe opisy procedur obowiązujących w realizacji statycznej próby rozciągania oraz przy opracowaniu wyników są opisane w normie PN-EN ISO 6892-1 z roku 2016. W czasie prowadzenia próby wspomniana norma powinna być przewodnikiem dla prowadzącego eksperyment. Powtarzanie w książce treści normy jest, ze względu na jej dostępność, raczej nieuzasadnione.

## LITERATURA

- [1] Jodłowski H., Metoda rozpoznawania odkształceń plastycznych w procesie obciążania stali wykazujących niestateczność materiałową. Praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 2007.
- [2] Bućko S., Jodłowski H., Inicjacja odkształceń plastycznych w stali z wyraźną granicą plastyczności w warunkach gradientu naprężeń. *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 3, nr 1, 2009.
- [3] Bućko S., Jodłowski H., Inicjacja odkształceń plastycznych w stalach z niestatecznością materiałową w warunkach rozciągania i czystego zginania. *Czasopismo Techniczne*, nr 4, 2010.
- [4] Bućko S., Jodłowski H., Trzebicki M., An experimental-numerical analysis of plastic zones initiation around holes in shields made of steel 45 under tension. *Archive of Mechanical Engineering*, vol. LXI, no. 1, 2014.
- [5] Jodłowski H., Trzebicki M., The Comparative Analysis of Experimental and Numerical Results of Initial Phase of Plastic Deformation in Shields with Openings Under Tension, *Experimental Mechanics of Solids*, 2015.
- [6] Jodłowski H., Bućko S., Gibas P., Visualization of Processes of Plastic Deformation Initiation in Conditions of Pure Tension and Pure and Simple Bending, *Experimental Mechanics of Solids*, 2015.
- [7] Bućko S. (red.), Jodłowski H., Trzebicki M., Doświadczalno-numeryczna analiza pierwszej fazy odkształceń plastycznych w stalach z niestatecznością materiałową. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2015. (Do pracy załączono film obrazujący oryginalne przebiegi procesów inicjacji odkształceń plastycznych „Wizualizacja inicjacji odkształceń plastycznych w stalach z niestatecznością materiałową w warunkach rozciągania oraz czystego i prostego zginania” – Stefan Bućko, Henryk Jodłowski, Piotr Gibas).
- [8] Katarzyński S., Kocańda S., Zakrzewski M., Badanie własności mechanicznych metali. Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1967.
- [9] Krzyś W., Życzkowski M., Sprężystość i plastyczność. PWN, Warszawa 1962.
- [10] PN-EN ISO 6892-1, PKN, Warszawa 2020 (nr ref.PN-EN ISO 6892-1,2016-09).
- [11] Pyrzyński P., Metody eksperymentalne w mechanice i budowie maszyn. Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2018.



## ROZDZIAŁ 2

# PODSTAWY REOLOGII W MECHANICE KONSTRUKCJI

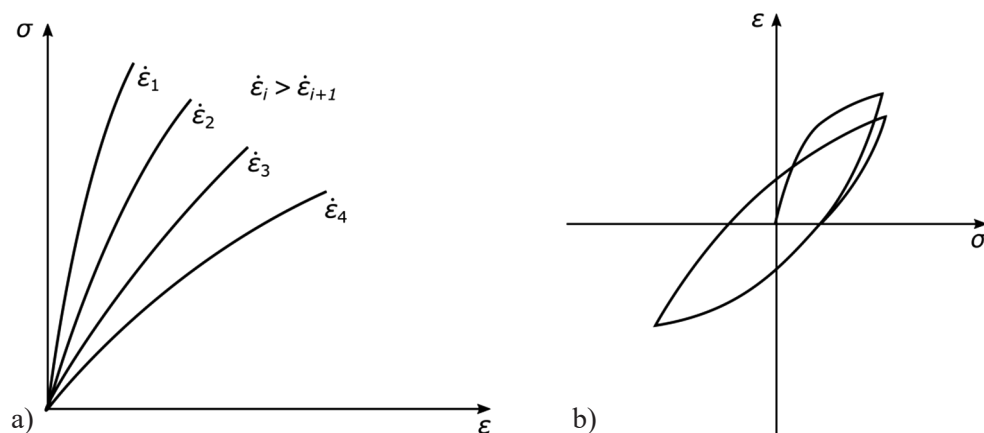
Grzegorz MILEWSKI

### 2.1. WPROWADZENIE

Podstawowym podejściem w mechanice ciał odkształcalnych jest opis zachowania materiałów z wykorzystaniem liniowej teorii sprężystości oraz teorii plastyczności. W podejściu tym parametr czasu nie jest brany pod uwagę, co prowadzi do opisów konstytutywnych materiałów charakteryzujących się zachowaniem niezależnym od czasu. Materiały idealnie sprężyste odkształcają się natychmiast po przyłożeniu obciążenia i wracają do pierwotnego stanu po odciążeniu bez efektu dyssypacji energii. Z kolei materiały w zakresie odkształceń plastycznych cechuje trwała utrata energii. Podejście sprężyste zakłada więc, że właściwości materiału, przykładowo takie jak moduł sprężystości, granica plastyczności czy wytrzymałość na rozciąganie, pozostają niezmiennie w czasie.

Istnieje jednak szeroka grupa materiałów, takich jak metale w wysokich temperaturach, materiały polimerowe, biopolimery czy tkanki biologiczne, które wykazują stopniowe cechy deformacji i nawrotu po odciążeniu, co ostatecznie powoduje zmiany ich właściwości w czasie. Odpowiedź tych materiałów na pole odkształceń mechanicznych zależy zarówno od prędkości odkształcenia/naprężenia, liczby i charakteru cykli obciążeniowych, jak i samej temperatury (rys. 2.1). Takie zależne od temperatury i czasu zachowanie materiału określa się pojęciem lepkosprężystości. Termin lepkosprężystość składa się z dwóch słów: lepkość i sprężystość. Sprężystość jest właściwością materiału jako ciała stałego, natomiast lepkość jest właściwością cieczy, stanowiąc miarę oporu struktury wewnętrznej w procesie płynięcia. Dlatego lepkosprężyste ciało stałe wykazuje właściwości zarówno cieczy, jak i ciała stałego, a zależność naprężeniowo-odkształceniowa obejmuje wpływ czasu i temperatury. W mechanice ciała stałego odkształcalnego lepkosprężystość często zastępuje się terminem reologia (z greckiego ρει – płynąć oraz λογος – wiedza, nauka). Temperatura jest podstawowym czynnikiem ujawniającym cechy reologiczne ciał stałych. Wprowadzając znormalizowaną homologiczną skalę temperatur  $\Theta = T/T_m$ , gdzie  $T_m$  jest temperaturą topnienia materiału, można formalnie oszacować zakresy temperatur, w których nie można pominąć lepkosprężystych lub reologicznych właściwości materiałów. Fenomenologicznie potwierdzono, że dla materiałów konstrukcyjnych

wartością graniczną jest  $\theta \geq 0,5$ . Podejście takie determinuje uznanie materiałów i kompozytów polimerowych oraz materiałów metalicznych pracujących w wysokich temperaturach za materiały o cechach lepkosprężystych [4, 5].

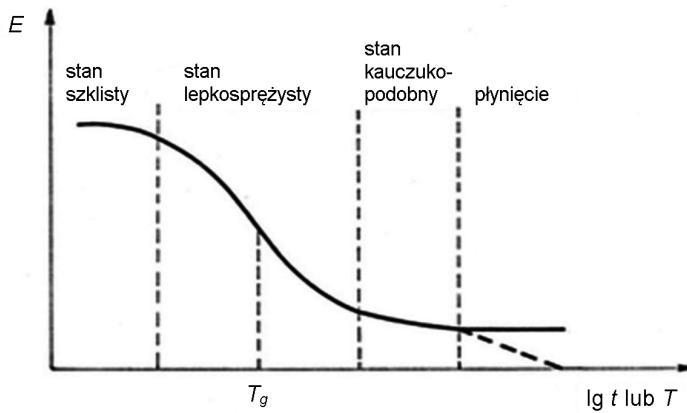


Rys. 2.1. Schematy ilustrujące zmianę sztywności materiału wraz ze wzrostem prędkości odkształcania (a) i z kolejnym cyklem obciążenia (b)

Lepkosprężystość jest zjawiskiem fizycznym związanym strukturalną naturą ciał stałych poddanych deformacji. W dużym uproszczeniu cechy sprężyste materiału wynikają z odwracalnej deformacji wiązań chemicznych, a lepkość wynika z przegrupowania molekularnego w uporządkowanej strukturze ciała stałego. Zjawiska lepkosprężyste obejmują więc połączone zmiany strukturalne i konformacyjne, ruchy i przegrupowania molekularne w materiale w warunkach obciążeń mechanicznych. W krystalicznych lub półkrystalicznych materiałach metalicznych związane jest to głównie ze zmianami w uporządkowaniu dyslokacji w wyniku ich ruchu na skutek migracji, poślizgów, wzajemnych przecięć, połączonych często z tworzeniem się wad materiałowych. Obserwuje się również stopniowy rozwój struktury mozaikowej wewnątrz ziaren polikrystalicznego materiału, często z towarzyszącymi poślizgami wewnątrz ziaren i na ich granicach. W materiałach polimerowych mechanizmy płynięcia molekularnego zależą bezpośrednio od wiązań międzycząsteczkowych i struktury splątania ich łańcuchów, zachowując jednocześnie integralność struktury polimeru. Główne cechy lepkosprężyste zależą więc od zmian izomerii chemicznej, rotacji segmentów łańcucha polimeru, ruchów grup bocznych i związanego z tym ewentualnego zrywania wiązań fizycznych i chemicznych [1, 2, 3].

## 2.2. PODSTAWY TERMODYNAMICZNE LEPKOSPĘŻYSTOŚCI

Ciała lepkospężyte charakteryzują się zróżnicowanym zachowaniem podczas badania w różnych temperaturach, jak również w bardzo krótkim lub długim okresie czasu. Różnice te dotyczą zarówno stałych, jak i funkcji materiałowych i wynikają ze złożonej strukturalnej, molekularnej i termodynamicznej odpowiedzi materiału na obciążenie mechaniczne [4, 8, 12]. Przykładowo, rys. 2.2 przedstawia charakter zależności modułu sprężystości podłużnej dla termoplastycznych polimerów w funkcji temperatury i czasu. Takie charakterystyki umożliwiają określenie stanów fizycznych tworzyw sztucznych i rozgraniczających je charakterystycznych temperatur, w tym podstawowej temperatury przemian fazowych materiału:  $T_g$  – temperatura zeszklenia.



Rys. 2.2. Zależność modułu sprężystości podłużnej od czasu (w skali logarytmicznej) i temperatury dla typowego polimerowego materiału termoplastycznego

W podejściu termodynamicznym przyrost pracy mechanicznej  $f dx$  jest równoważony wzrostem energii wewnętrznej  $dU$  i zmniejszenia entropii  $dS$  materiału:

$$f dx = dU - TdS \quad (2.1)$$

W uproszczeniu, entropowo lub energetycznie sterowana sprężystość zależy od struktury materiału, a w szczególności od jego sztywności. W przypadku materiałów metalicznych, które charakteryzują się niewielką elastycznością entropową, siła/naprężenie potrzebne do utrzymania próbki w stałym wydłużeniu zmniejsza się wraz z temperaturą, gdyż rozszerzalność cieplna zmniejsza naprężenia wewnętrzne. W przypadku polimerów, zwłaszcza polimerów kauczukopodobnych, wpływ ten jest o zdecydowanie przeciwnym charakterze.

Z drugiej strony prędkość (częstotliwość  $\nu$ ) zmian strukturalnych w materiale (częstotliwość molekularnych zmian konformacyjnych) podlega formule typu Arrheniusa:

$$\nu = \nu_0 \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right) \quad (2.2)$$

gdzie  $\nu_0$  jest podstawową częstotliwością drgań cieplnych struktury atomowej,  $\Delta H$  jest pozorną barierą energetyczną aktywacji procesu,  $kT$  jest energią cieplną, a  $k$  jest stałą Boltzmana. Uogólnienie podejścia Arrheniusa prowadzi do teorii aktywacji termicznej wspomaganej naprężeniowo, znanej również jako teoria Żurkowa. Podejście to określa zależność czasów relaksacji  $\tau_{rel}$  od molekularnych zmian strukturalnych, zarówno konformacyjnych, jak i chemicznych [8, 12].

$$\tau_{rel} = \tau_0 \exp\left(-\frac{\Delta H}{kT}\right) \quad (2.3)$$

lub

$$\tau_{rel} = \tau_0 \exp\left[\frac{(\Delta H - V\sigma)}{kT}\right] \quad (2.4)$$

gdzie  $\tau_0$  jest podstawowym okresem drgań termicznych sieci atomowej,  $V$  jest objętością elementarną procesu aktywacji, nazywaną również „objętością swobodną”, a  $\sigma$  jest naprężeniem efektywnym.

Z rys. 2.2 wynika, że w temperaturach znacznie niższych niż temperatura zeszklenia  $T_g$  prędkości są względnie wolne i zmiany konformacyjne można pominąć. Tak więc „zamrożone” ruchy entropowe skutkują zdolnością materiału do reagowania na obciążenia mechaniczne tylko sprężystym natychmiastowym i odwracalnym efektem deformacji wiązań, co jest potocznie określane jako stan „szklisty”. W przypadku temperatur przeciwnych, znacznie powyżej  $T_g$ , prędkości są wystarczająco szybkie, a materiał reaguje w sposób gumopodobny, który wykazuje duże, chwilowe, a także w pełni odwracalne odkształcenia w odniesieniu do przyłożonego naprężenia. W zakresie temperatur między stanem szklistym i kauczukopodobnym reakcje materiału są połączone w sposób charakterystyczny zarówno dla lepkiego płynu, jak i sprężystego ciała stałego. Ten zakres określa się jako „lepkosprężysty”.

Z praktycznego, inżynierskiego punktu widzenia przyjmuje się, że zachowania materiału lepkosprężystego można ocenić przy użyciu prostej bezwymiarowej wielkości zwanej liczbą Deborah  $D_e$ , która jest stosunkiem czasu relaksacji  $\tau_{rel}$  do całkowitego czasu eksperymentu  $t$  w warunkach obciążeń mechanicznych:

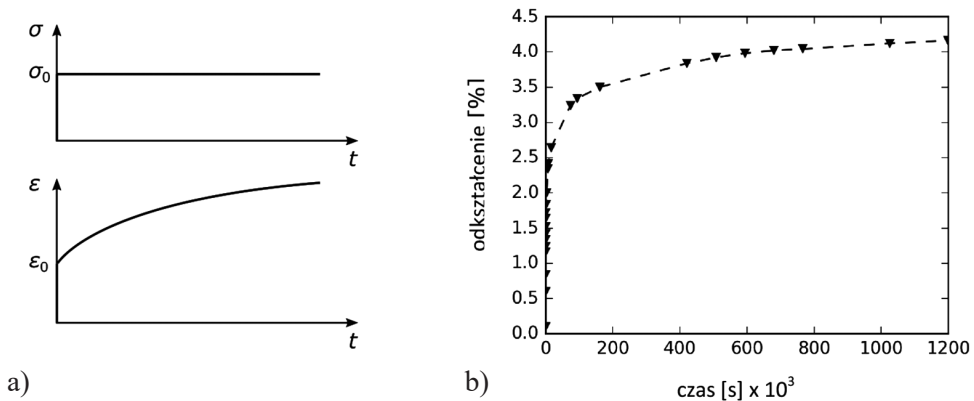
$$D_e = \frac{\tau_{rel}}{t} \quad (2.5)$$

Względny stosunek wartości czasu relaksacji do skali czasowej doświadczenia oznacza rozróżnienie charakterystyki lepkosprężystej ciała stałego. Dla  $D_e \ll 1$  materiał jest bardziej sztywny lub szklisty, podczas gdy dla  $D_e \gg 1$  ciało stałe zachowuje się bardziej jak kauczuk czy guma. Oznacza to, że w przypadku materiałów

charakteryzujących się szybkim czasem przemiany fazowej/czasem relaksacji tylko eksperymenty o dużej prędkości odkształcenia/naprężenia dają odpowiedź jak ciało stałe w stanie szklistym. W przypadku ciał stałych o bardzo powolnym przejściu (bardzo długie czasy relaksacji) reakcja charakterystyczna dla cieczy jest możliwa tylko w bardzo długich skalach czasowych.

### 2.3. FUNKCJE PEŁZANIA I RELAKSACJI

Równanie stanu dla materiału lepkosprężystego przy założeniu stałej temperatury można wyrazić jako funkcję zależną od naprężenia, odkształcenia i czasu w postaci  $f(\sigma, \varepsilon, t) = 0$ . Typowe, zależne od czasu, badania można przeprowadzić w warunkach obciążenia dynamicznego (wymuszenie poprzez zadanie siły) lub kinematycznego (zadanie określonego przemieszczenia). Odpowiedź materiału na obciążenie mechaniczne związane jest z dwoma podstawowymi zjawiskami fizycznymi lepkosprężystości, zwanymi pełzaniem i relaksacją naprężeń. Próba pełzania oznacza zależność odkształcenia od czasu  $\varepsilon(t)$  w warunkach stałej wartości naprężenia  $\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$ , gdzie  $H(t)$  jest funkcją Heaviside'a [ $H(t) = 0$  dla  $t < 0$ ,  $H(t) = 1$  dla  $t \geq 0$ ] – rys. 2.3a. Przykładowy test pełzania dla polietylenu o wysokiej gęstości w temperaturze pokojowej przedstawiony na rys. 2.3b pokazuje, że odkształcenie zmienia się przy stałym naprężeniu  $\sigma_0$  w szerokim zakresie czasu obciążenia.

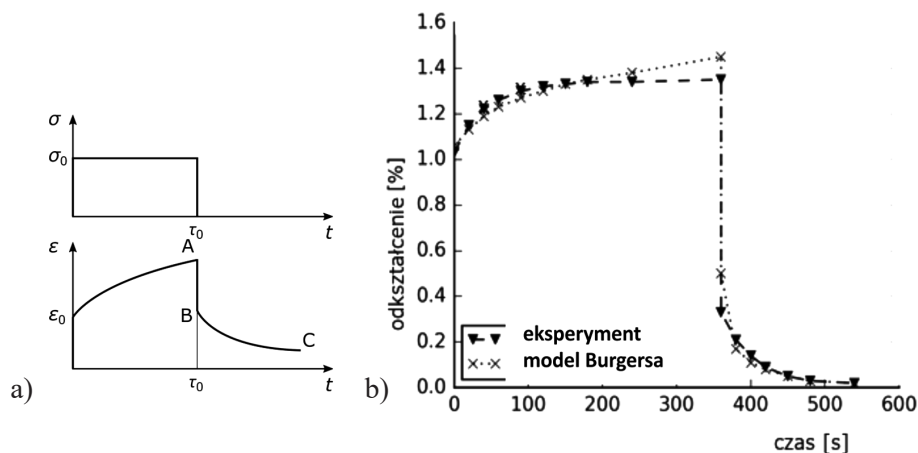


Rys. 2.3. Schemat przedstawiający krzywą pełzania w warunkach obciążenia stałym naprężeniem oraz test pełzania dla polietylenu w temperaturze pokojowej

Rozwiązanie równania stanu w warunkach pełzania, tzn. równania  $f(\sigma_0, \varepsilon, t) = 0$ , jest definiowane jako funkcja pełzania, zwana czasami również podatnością pełzania lub modulem pełzania:

$$\varphi(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (2.6)$$

Próba pełzania z odciążaniem ilustruje z kolei podstawowe cechy zależnego od czasu zachowania materiału i wskazuje na najważniejsze różnice między odpowiedzią materiału idealnie sprężystego i lepkosprężystego – rys. 2.4a. Po zdjęciu obciążenia w czasie  $\tau_0$  rozpoczyna się stopniowy nawrót odkształceniowy, który dzieli się na dwie zasadnicze części: nawrót sprężysty natychmiastowy (część A-B) i nawrót sprężysty opóźniony (część B-C), która to faza w materiałach sprężystych w ogóle nie występuje. Rys. 2.4b pokazuje zjawisko nawrotu lepkosprężystego opóźnionego dla poliamidu w temperaturze pokojowej.

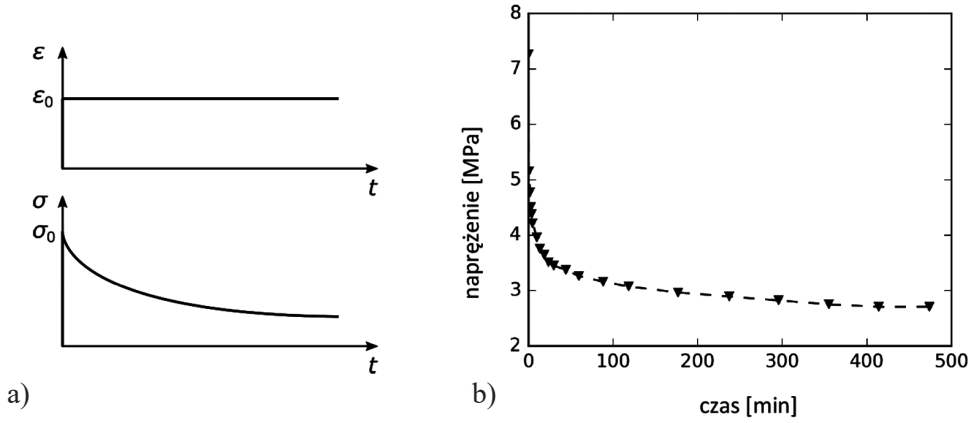


Rys. 2.4. Schemat ilustrujący próbę pełzania z odciążaniem (a) oraz wyniki tego testu dla tworzywa z grupy poliamidów (b)

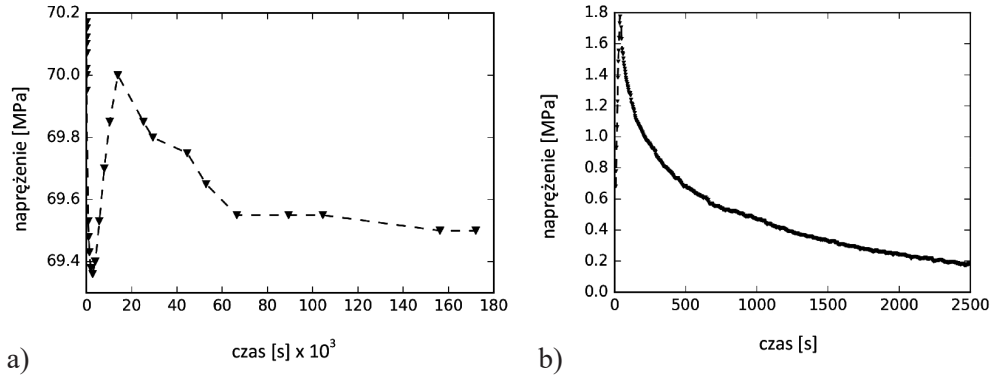
Drugim podstawowym rodzajem eksperymentu w lepkosprężystości jest próba relaksacji naprężenia. W eksperymencie tym materiał jest deformowany do stałego odkształcenia i mierzona jest siła/naprężenie wymagane do utrzymania odkształcenia na stałym poziomie. Dla warunków obciążenia  $\epsilon(t) = \epsilon_0 H(t)$  odpowiedzią materiału jest zmiana naprężenia w czasie – rys. 2.5a. Rozwiązanie równania stanu dla testu relaksacji naprężenia, czyli funkcji  $f(\epsilon_0, \sigma, t) = 0$ , umożliwia zdefiniowanie funkcji relaksacji naprężenia, zwanej czasami również modułem relaksacji:

$$\psi(t) = \frac{\sigma(t)}{\epsilon_0} \quad (2.7)$$

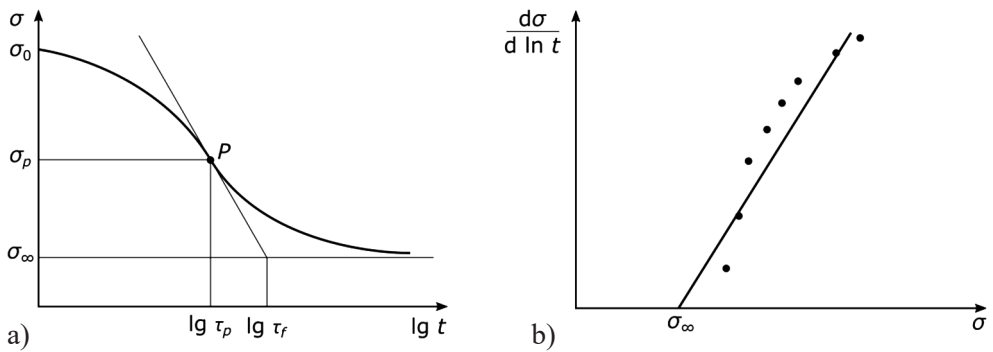
Na rys. 2.5b przedstawiono przebieg relaksacji naprężenia dla elastomerowego poliuretanu stosowanego do ligatur ortodontycznych. Rys. 2.6 przedstawia z kolei efekty relaksacji naprężeń odpowiednio dla stali narzędziowej NC 6 (a) oraz materiału biologicznego pobranego ze skóry świńskiej (b). W tym miejscu warto zaznaczyć, że pomimo powszechnie przyjmowanego założenia, że zjawiska reologiczne w metalach w temperaturze pokojowej są pomijane, pełzają one i relaksują, jednak w bardzo niewielkim zakresie.



Rys. 2.5. Schemat przedstawiający krzywą relaksacji naprężenia w warunkach stałego odkształcenia (a) oraz przykładowe wyniki relaksacji naprężenia dla poliuretanu w temperaturze pokojowej (b) [8]



Rys. 2.6. Przebiegi relaksacji naprężeń dla narzędziowej stali NC 6 (a) oraz skóry świńskiej (b) w temperaturze pokojowej



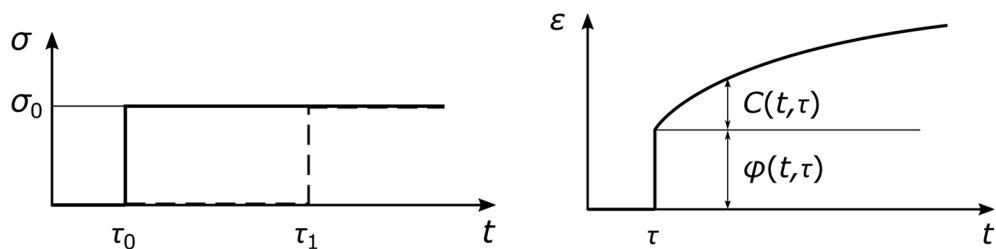
Rys. 2.7. Schemat przedstawiający krzywą relaksacji naprężenia w znormalizowanym półlogarytmicznym układzie współrzędnych (a) i ilustrację wyznaczenia naprężenia równowagowego za pomocą metody Li (b)

Krzywe relaksacji naprężenia są często przedstawiane w znormalizowanym półlogarytmicznym układzie współrzędnych  $\sigma$  vs  $\lg(t)$  lub  $\sigma^*/\sigma_0^*$  vs  $\lg(t)$ , gdzie  $\sigma^* = \sigma - \sigma_\infty$ ,  $\sigma_0^* = \sigma_0 - \sigma_\infty$ , gdzie  $\sigma_\infty$  oznacza tzw. naprężenie równowagi dla czasu  $t \rightarrow \infty$  – rys. 2.7a. Reprezentacja ta ma swoją zasadniczą zaletę, która umożliwia bezpośrednie określenie czasu/czasów relaksacji materiału, które odpowiadają charakterystycznemu punktowi/punktom przegięcia krzywych relaksacji naprężenia. Podejście to zilustrowano na rys. 2.7b, wykorzystując ekstrapolacyjną metodę Li wyznaczania naprężenia równowagowego  $\sigma_\infty$  [9].

## 2.4. ZMIENNICZE I NIE-ZMIENNICZE MATERIAŁY LEPKOSPĘŻYSTE

W analizie zachowania się ciał stałych w teorii lepkosprężystości rozróżnia się czas przyłożenia obciążenia  $\tau$  w odniesieniu do samego czasu  $t$ . Pierwszy termin jest zwykle nazywany wiekiem materiału, a drugi jest określany jako czas obserwacji. Podejście to można zilustrować przykładem zależności funkcji pełzania od czasu – rys. 2.8. Stałe obciążenie naprężeniem  $\sigma_0$  przyłożone w czasie  $\tau$  skutkuje stosowną odpowiedzią funkcji pełzania. Oznaczając natychmiastowy moduł sprężystości (moduł Younga) w czasie  $t = \tau$  jako odwrotność funkcji pełzania  $E(\tau) = 1/\phi(t = \tau, \tau)$ , można zdefiniować pojęcie miary pełzania:

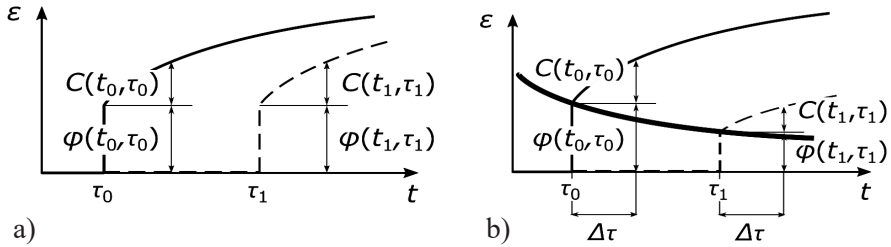
$$C(t, \tau) = \varphi(t, \tau) - \varphi(\tau, \tau) = \varphi(t, \tau) - \frac{1}{E(\tau)} \quad (2.8)$$



Rys. 2.8. Wymuszenie wartością stałego naprężenia  $\sigma_0$  i zależna od czasu odpowiedź funkcji odkształcenia

Zakładając, że natychmiastowy moduł Younga nie zależy od czasu (tzn.  $E(\tau) = E = \text{const}$ ), a więc i od momentu obciążenia, miara pełzania staje się funkcją różnicy  $(t - \tau)$ , tj.  $C(t, \tau) = C(t - \tau)$ . Tę prawidłowość zilustrowano na rys. 2.9a. Grupa materiałów podlegających tej regule opisywana jest w ramach tzw. niezmienniczej teorii lepkosprężystości. W ogólnym przypadku funkcja pełzania charakteryzuje się dwiema niezależnymi zmiennymi  $t$  i  $\tau$ , a moduł Younga jest funkcją momentu obciążenia – wiekiem materiału, co przedstawia rys. 2.9b. Ta grupa materiałów podlega ogólnej zmienniczej teorii lepkosprężystości.



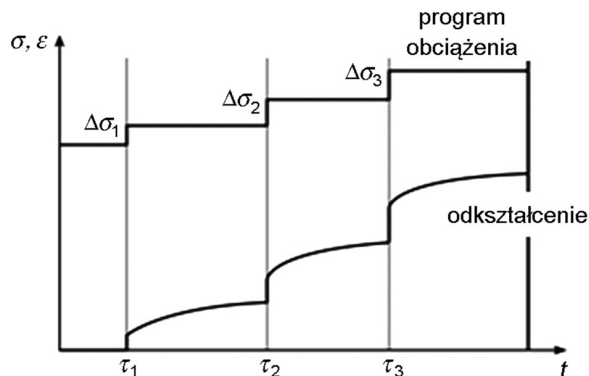


Rys. 2.9. Przebiegi funkcji pełzania dla niezmienniczych (a) i zmienniczych (b) materiałów lepkosprężystych

Dla pierwszego przypadku przyjęte w lepkosprężystości uproszczenie skutkuje poziomym przesunięciem stosownej krzywej reologicznej, w przeciwnym przypadku wykres zmienia zarówno swoje położenie, jak i kształt wzdłuż osi czasu.

## 2.5. LINIOWA TEORIA DZIEDZICZNOŚCI W LEPKOSPŘĘŻYSTOŚCI – ZASADA SUPERPOZYCJI BOLTZMANN

Zastosowanie liniowej lepkosprężystości jest powszechnie stosowanym podejściem do modelowania odpowiedzi materiału na dowolny program monotonicznego obciążenia. Matematyczne sformułowanie zachowania lepkosprężystego, znane jako zasada superpozycji Boltzmann, opiera się na założeniu, że odpowiedź materiału w dowolnym czasie  $t$  można uznać za sumę indywidualnych odpowiedzi na wymuszenie mechaniczne przyłożone we wszystkich poprzednich czasach. Oznacza to, że każdy ślad obciążenia ma swój własny niezależny wkład w całkowite odkształcenie, co można otrzymać poprzez proste sumowanie wszystkich niezależnych udziałów [6]. Ideę zasady superpozycji Boltzmann dla przyrostowych indywidualnych wymuszeń naprężeniowych zilustrowano na rys. 2.10.



Rys. 2.10. Schemat ilustrujący zasadę superpozycji Boltzmann w liniowej lepkosprężystości dla przypadku pełzania

Przy założeniu liniowości materiału, dyskretyzując indywidualne przyrosty naprężeń, całkowite odkształcenie w czasie  $t$  można uzyskać przez zsumowanie poszczególnych efektów, tzn.:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \sigma_0 \varphi(t - \tau_0) + \Delta\sigma_1 \varphi(t - \tau_1) + \Delta\sigma_2 \varphi(t - \tau_2) + \dots = \\ &= \sigma_0 \varphi(t - \tau_0) + \sum_i \Delta\sigma_i \varphi(t - \tau_i)\end{aligned}\quad (2.9)$$

Powyższe równanie można formalnie uogólnić w zapisie całkowym na postać tzw. całki Boltzmanna:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E(t)} \left[ \sigma(t) + \int_{\tau_0}^t \sigma(\tau) K(t - \tau) d\tau \right] \quad (2.10)$$

gdzie jądro  $K(t - \tau)$  równania całkowego jest podane przez funkcję pełzania  $\varphi(t - \tau)$ :

$$K(t - \tau) = -E(t) [\partial \varphi(t - \tau) / \partial \tau] \quad (2.11)$$

Jądro stanowi funkcję Greena, funkcję wpływu równania całkowego i opisuje wpływ przyrostowego wymuszenia naprężeniowego  $\sigma(\tau) d\tau$  przyłożonego w czasie  $\tau$  dla aktualnej wartości odkształcenia w czasie  $t$ . Oznacza to, że materiał dziedziczy wcześniejsze wpływy, ale odkształcenie zależy tylko od różnicy  $t - \tau$  i nie zależy od wyboru początku osi czasu. To wyjaśnia termin niezmienniczej teorii dziedziczności w lepkosprężystości.

Analogiczne podejście można zastosować dla przypadku wymuszenia kinematycznego – przyrostowych indywidualnych wartości odkształceń. Prowadzi to do następującej zależności:

$$\sigma(t) = E(t) \left[ \varepsilon(t) - \int_{\tau_0}^t \varepsilon(\tau) R(t - \tau) d\tau \right] \quad (2.12)$$

gdzie jądro  $R(t - \tau)$  równania całkowego jest tym razem określone przez funkcję relaksacji naprężeń  $\psi(t - \tau)$ :

$$R(t - \tau) = \frac{1}{E(t)} [\partial \psi(t - \tau) / \partial \tau] \quad (2.13)$$

W przypadku testów pełzania i relaksacji naprężenia funkcje Greena można uprościć do następujących postaci:

$$K(t) = \dot{\varepsilon}(t) \frac{E(t)}{\sigma_0} \quad \text{i} \quad R(t) = -\frac{\dot{\sigma}(t)}{E(t) \varepsilon_0} \quad (2.14)$$

Obie funkcje całkowej reprezentacji w liniowej lepkości można wykorzystać do konwersji danych pełzania na relaksację naprężeń i odwrotnie zgodnie z poniższą zależnością:

$$K(t) - R(t) = \int_0^t R(t-s)K(s)ds = \int_0^t K(t-s)R(s)ds \quad (2.15)$$

Zakładając, że znane jest jedno jądro funkcji podcałkowej, na przykład najczęściej stosowane do lepkości ciał stałych jądro typu potęgowego  $K(t) = At^{\alpha-1}$ , funkcje pełzania/naprężenia uwzględniają tylko jedną wartość czasu retardacji/relaksacji. Wówczas rozwiązanie procesów pełzania i relaksacji można wyrazić następującymi zależnościami:

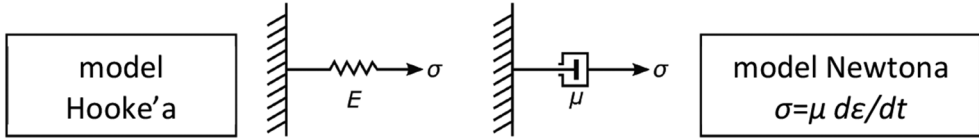
$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 + \frac{A}{\alpha} t^\alpha \right) = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 t^\alpha \quad (2.16)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 \left( 1 - \frac{A}{\alpha} t^\alpha \right) = \sigma_0 - \sigma_1 t^\alpha \quad (2.17)$$

## 2.6. LINIOWE MODELE MECHANICZNE

Model sprężyny jest podstawowym elementem stosowanym w inżynierii mechanicznej do symulacji sprężystego zachowania materiałów, zwanych również ciałem stałym Hooke'a. Prawo Hooke'a zakłada, że przyłożone naprężenie powoduje stałe odkształcenie materiału, zgodnie ze znaną formułą  $\sigma = E\varepsilon$ , gdzie  $E$  oznacza moduł sprężystości podłużnej, określane często jako moduł Younga. Odkształcenie sprężyny jest w pełni odwracalne. Drugim podstawowym elementem inżynierii mechanicznej jest tłumik, który opisuje płyn newtonowski. Prawo Newtona zakłada, że naprężenie zależy od prędkości odkształcenia, a nie od samego odkształcenia, i jest używane do modelowania liniowo lepkiego zachowania płynu w postaci  $\sigma = \mu d\varepsilon/dt$ , gdzie  $\mu$  oznacza współczynnik tarcia wewnętrznego (lepkość). W literaturze współczynnik ten jest również często oznaczony jako  $\eta$ . Oba modele, ciało stałe Hooke'a i płyn Newtona, przedstawiono na rys. 2.11.

Koncepcja kombinacji sprężyn i tłumików połączonych ze sobą na różne sposoby, szeregowo lub równolegle, stała się podstawą do stworzenia empirycznych modeli lepkości, zwanych liniowymi modelami mechanicznymi [2, 6, 8]. Bez względu na liczbę sprężyn i tłumików, a także sposobów ich połączeń, opis matematyczny modelu materiału lepkości można sformułować następującym równaniem różniczkowym zwyczajnym o stałych współczynnikach



Rys. 2.11. Modele mechaniczne sprężyny liniowej oraz liniowego tłumika przedstawiające ciało stałe Hooke'a i płyn Newtona

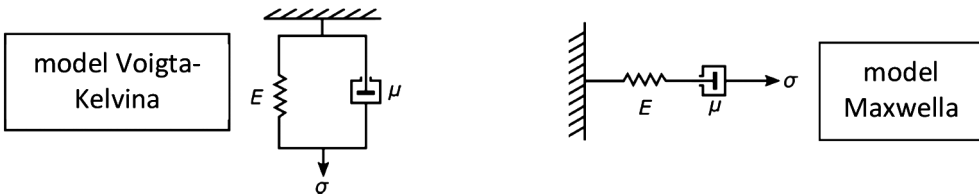
$$A_0 \varepsilon(t) + A_1 \dot{\varepsilon}(t) + A_2 \ddot{\varepsilon}(t) + A_3 \dddot{\varepsilon}(t) + \dots = B_0 \sigma(t) + B_1 \dot{\sigma}(t) + B_2 \ddot{\sigma}(t) + B_3 \dddot{\sigma}(t) + \dots \quad (2.18)$$

gdzie  $A_0, A_1, A_2, \dots$  oraz  $B_0, B_1, B_2, \dots$  są współczynnikami zależnymi od indywidualnych stałych materiałowych  $E_i$  i  $\mu_i$  poszczególnych sprężyn i tłumików wchodzących w skład danego modelu mechanicznego ciała stałego.

Liniowość tego podejścia polega na liniowych zależnościach naprężenia, odkształcenia i wszystkich ich pochodnych od czasu. Najczęściej stosowane liniowe mechaniczne modele lepkosprężyste przedstawiono poniżej.

### 2.6.1. DWU- I WIELOPARAMETROWE LINIOWE MECHANICZNE MODELE LEPKOSPŘŻYZSTE

Najprostsze połączenie pojedynczej sprężyny i pojedynczego tłumika to połączenie równoległe lub szeregowe. Konfiguracje te znane są odpowiednio w literaturze jako modele Voigta-Kelvina i Maxwella – rys. 2.12.



Rys. 2.12. Liniowe mechaniczne modele lepkosprężyste ciał stałych typu Voigta-Kelvina i Maxwella

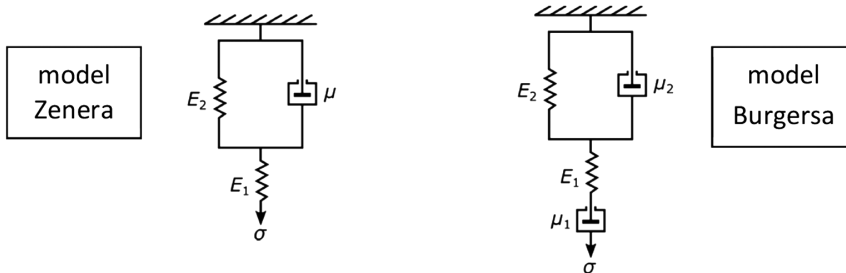
W układzie równoległym modelu Voigta-Kelvina całkowite naprężenie przyłożone do modelu rozdziela się oddzielnie na naprężenia przenoszone przez sprężyny i tłumik, podczas gdy odkształcenia pozostają takie same w obu elementach i są równoważne odkształceniu w całym modelu. Dla szeregowego układu połączenia w modelu Maxwella sposób superpozycji jest dokładnie odwrotny, tzn. całkowite naprężenie przyłożone do modelu pozostaje takie samo w sprężynie i w tłumiku, natomiast całkowite odkształcenie modelu jest sumą odkształceń sprężyny i tłumika.

ka. Stosując powyższe reguły, można wyprowadzić liniowe równania różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu, które reprezentują zależności naprężenie–odkształcenie–czas (równania konstytutywne) odpowiednio dla modeli lepkosprężystych typu Voigta-Kelvina i Maxwella.

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\mu} \quad (2.19)$$

$$\dot{\varepsilon}(t) + \frac{E}{\mu} \varepsilon(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{\mu} \quad (2.20)$$

Bardziej złożone, powszechnie stosowane w praktyce modele lepkosprężyste to modele trój- i czteroparametrowe. Trójparametrowy model Zenera (często określany mianem modelu standardowego) składa się z ciała Voigta-Kelvina i dodatkowej sprężyny połączonych szeregowo. Z kolei struktura czteroparametrowego modelu Burgera obejmuje ciała Maxwella i Voigta-Kelvina połączone szeregowo – rys. 2.13. Modele te opisują z wystarczającą dokładnością podstawowe cechy reologiczne, w tym procesy pełzania i relaksacji naprężenia, dużej liczby materiałów polimerowych, metali w podwyższonych temperaturach i tkanek biologicznych.



Rys. 2.13. Liniowe modele mechaniczne lepkosprężystych ciał stałych – model Zenera (standardowy) oraz model Burgersa

Stosując zasady sumowania odkształceń i naprężeń, jak w przypadku modeli dwuparametrowych, równania konstytutywne dla modeli Zenera i Burgersa można przedstawić odpowiednio w postaci następujących równań różniczkowych:

$$E_1 \mu \dot{\varepsilon}(t) + E_1 E_2 \varepsilon(t) = \mu \dot{\sigma}(t) + (E_1 + E_2) \sigma(t) \quad (2.21)$$

$$A_2 \ddot{\varepsilon}(t) + A_1 \dot{\varepsilon}(t) = B_2 \ddot{\sigma}(t) + B_1 \dot{\sigma}(t) + B_0 \sigma(t) \quad (2.22)$$

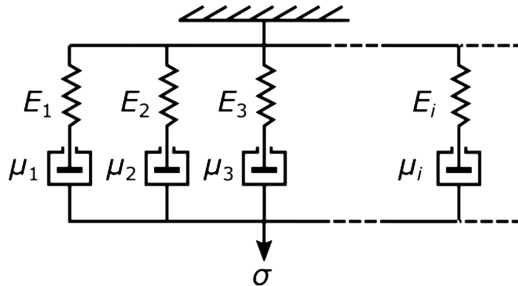
gdzie:

$$A_1 = \mu, \quad A_2 = \frac{\mu_1 \mu_2}{E_2}, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = \frac{\mu_1}{E_1} + \frac{\mu_1}{E_2} + \frac{\mu_2}{E_2}, \quad B_2 = \frac{\mu_1 \mu_2}{E_1 E_2}$$

Modele trój- i czteroparametrowe są powszechnie stosowane do opisu lepkosprężystych właściwości ciał stałych, w szczególności materiałów polimerowych. Bardzo dobrą zgodność krzywych eksperymentalnych i teoretycznych dla modelu Burgersa dla testu pełzania z odciążaniem dla poliamidu pokazano na rys. 2.4b.

## 2.6.2. UOGÓLNIONE LINIOWE MODELE LEPKOSPŘĘŻYSTE

Proste, dwuparametrowe modele materiałów lepkosprężystych charakteryzują się tylko jednym czasem przejścia/przemiany fazowej, co jest istotnym uproszczeniem bardziej złożonych cech strukturalnych materiałów. Zasadniczo materiały lepkosprężyste, głównie polimery i materiały biologiczne, mają szerokie spektrum czasów przejścia, ponieważ każdy proces ma swój charakterystyczny czas. W zależności od rodzaju testu reologicznego, relaksacji naprężenia lub pełzania nazywa się je czasami relaksacji lub retardacji/opóźnienia. Formalna idea łączenia dowolnej liczby elementów Maxwella lub Voigta-Kelvina w szeregowych lub równoległych układach prowadzi do uogólnionej liniowej teorii lepkosprężystości. Przykładowo rys. 2.14 ilustruje równoległe połączenie elementów Maxwella, z których każdy ma inną stałą materiałową i stałą czasową.



Rys. 2.14. Uogólniony liniowy mechaniczny model lepkosprężysty typu Maxwella dla równoległego układu połączeń

Zgodnie z zasadą sumowania naprężeń dla dowolnej liczby  $n$  elementów połączonych równolegle proces relaksacji naprężeń przy stałym odkształceniu  $\varepsilon_0$  skutkuje naprężeniem całkowitym w modelu ciała w postaci:

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^n \sigma_i = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^n E_n \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right) \quad (2.23)$$

gdzie  $E_n$  i  $\tau_n$  to, odpowiednio, moduł Younga i czas relaksacji  $n$ -tego elementu modelu. Tak więc całkowity spadek naprężenia zostanie rozłożony na pewien okres czasu ze względu na indywidualne wartości czasów relaksacji. Całkowa reprezentacja tego podejścia wynika z następującego wzoru:

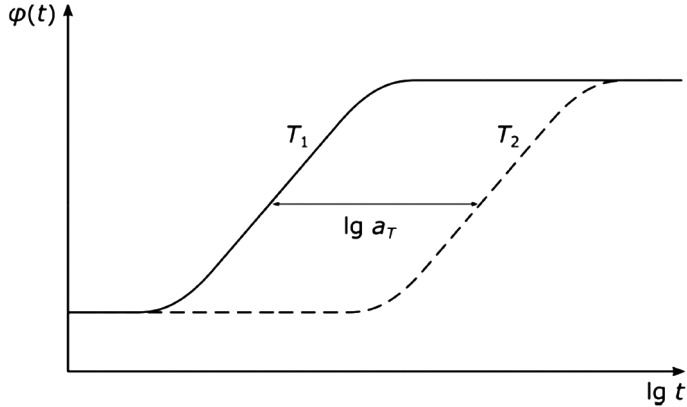
$$\sigma(t) = E\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} H(\tau) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) d(\ln \tau) \quad (2.24)$$

gdzie  $H(\tau)$  jest widmem czasów relaksacji modelu. Najczęściej stosowanymi rozkładami widm relaksacyjnych są normalne rozkłady Gaussa i rozkłady prostokątne (*box-shaped*). Ponieważ argument  $\tau$  jest stosunkiem lepkości do sztywności pojedynczego elementu Maxwella, całkowe reprezentacje opisuje sposób, w jaki naprężenie całkowite zmniejsza się z czasem. Podobne podejście można zastosować dla uogólnionego modelu Voigta-Kelvina w odniesieniu do rozkładów widm czasów opóźnienia (retardacji).

## 2.7. ZASADA RÓWNOWAŻNOŚCI TERMICZNO-CZASOWEJ

Na zachowanie mechaniczne materiałów, metalicznych, a szczególnie polimerowych, duży wpływ ma temperatura, głównie ze względu na rolę różnych zmiennych cech struktury molekularnej, takich jak: stopień krystaliczności, zawartość struktury amorficznej, poślizgi dyslokacji lub całych szkieletów molekularnych, wzajemne sieciowanie i splątanie cząsteczek. Jak stwierdzono wcześniej, dynamiczny ruch molekularny materiału ma charakterystyczną skalę czasową odpowiadającą prostej zasadzie: im większy wzrost temperatury, tym bardziej intensywna jest częstotliwość drgań molekularnych (stopień wzbudzenia termicznego struktury). Taka prawidłowość staje się fundamentalna przy przewidywaniu mechanicznego zachowania materiałów w różnych temperaturach, szczególnie w dłuższych okresach czasu i w literaturze znana jest pod nazwą zasady (prawa) równoważności termiczno-czasowej. Sprowadza się ona do reguły czasowo-temperaturowego przejścia lepkosprężystego w materiałach, reprezentowanej poprzez tzw. współczynnik przesunięcia  $a_T$  lub  $\lg(a_T)$ . Innymi słowy prawo równoważności termiczno-czasowej zakłada, że lepkosprężyste zachowanie materiału w jednej temperaturze może być odniesione do innej temperatury tylko poprzez zmianę skali czasowej. Zasadę tę zilustrowano na rys. 2.15, gdzie dwie krzywe funkcji pełzania w logarytmicznej skali czasu, w dwóch różnych temperaturach  $T_1$  i  $T_2$ , można otrzymać poprzez ich wzajemne poziome przesunięcie o wektor  $\lg(a_T)$ , oczywiście przy założeniu, że materiał jest niezmienniczy w czasie.

Powyższe podejście w praktyce znane jest w literaturze jako równanie Williamsa-Landela-Ferry'ego (WLF). Autorzy tego równania zbadali szeroką grupę materiałów polimerowych, głównie o strukturze amorficznej, i stwierdzili, że dla praktycznie wszystkich rozważanych materiałów współczynnik przesunięcia można podać za pomocą jednego równania empirycznego określającego współczynnik przesunięcia w odniesieniu do referencyjnego lepkosprężystego zachowania się materiału w temperaturze odniesienia  $T_s$  lub  $T_g = T_s - 323 \text{ K}$



Rys. 2.15. Schemat ilustrujący zasadę równoważności termiczno-czasowej w przebiegu funkcji pełzania  $\phi(t)$  w dwóch różnych temperaturach  $T_1$  i  $T_2$

$$\lg(a_T) = \frac{C_1(T - T_s)}{C_2 + (T - T_s)} = \frac{C_1^g(T - T_g)}{C_2^g + (T - T_g)} \quad (2.25)$$

gdzie  $T$ ,  $T_s$ ,  $T_g$  oznaczają odpowiednio temperaturę eksperymentu, temperaturę odniesienia, temperaturę zeszklenia, a  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_1^g$ ,  $C_2^g$  są współczynnikami dopasowania wyznaczanymi empirycznie [13].

Powyższe równanie pozwala przewidzieć długotrwałe zachowanie lepkosprężyste materiałów w temperaturze pokojowej na podstawie krzywych wzorcowych otrzymanych w znacznie krótszym czasie, ale w podwyższonych temperaturach. Należy jednak pamiętać, że istnieje wiele materiałów, których zachowanie nie podlega równaniu WLF, a współczynniki przesunięcia każdorazowo należy wyznaczać indywidualnie.

## 2.8. DYNAMICZNA ANALIZA MECHANICZNA W LEPKOSPŘĘŻYSTOŚCI CIAŁ STAŁYCH

Wpływ czasu obciążenia materiałów lepkosprężystych jest często badany w warunkach dynamicznej analizy mechanicznej w szerokim zakresie częstotliwości, na ogół w warunkach obciążeń sinusoidalnie zmiennych [4, 12]. Ze względu na cechy tłumienia sinusoidalny sygnał wejściowy skutkuje sinusoidalnym opóźnionym sygnałem wyjściowym – odpowiedź materiału ma tę samą częstotliwość, ale różną modulowaną amplitudę. Przykładowo zastosowane wymuszenie sinusoidalne:

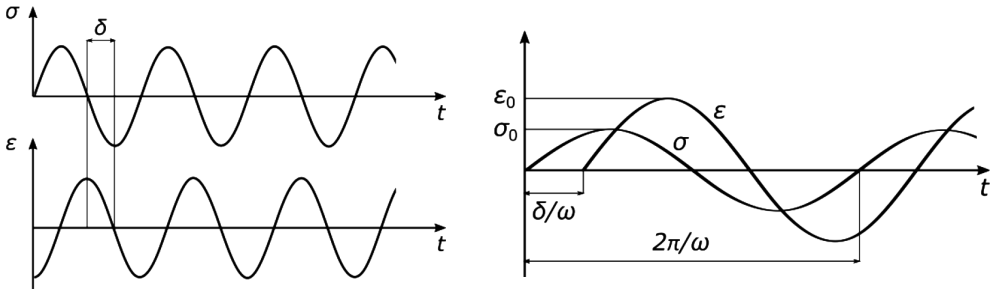
$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad (2.26)$$

powoduje zmianę fazy odpowiedzi naprężeniowej materiału:



$$\sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) = \sigma_0 [\sin(\omega t) \cos(\delta) + \cos(\omega t) \sin(\delta)] \quad (2.27)$$

gdzie  $\omega$  jest częstotliwością kątową, a  $\delta$  oznacza przesunięcie fazowe. Odpowiedź naprężeniową można uznać za złożoną z dwóch składników o odpowiednich amplitudach:  $\sigma_0 \cos(\delta)$  zgodnej w fazie z odkształceniem i  $\sigma_0 \sin(\delta)$  przesuniętej w fazie w stosunku do odkształcenia o  $\pi/2$  radianów – rys. 2.16.



Rys. 2.16. Schemat sinusoidalnych wymuszeń oraz odpowiedzi zgodnej i przesuniętej w fazie o tej samej częstotliwości i względnym przesunięciu fazowym

Wobec tego zależność naprężeniowo-odkształceniową dla materiału liniowo lepko-sprężystego w warunkach dynamicznej analizy mechanicznej można przedstawić w następującej postaci:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 [G_1 \sin(\omega t) + G_2 \cos(\omega t)] \quad (2.28)$$

gdzie zgodny w fazie moduł  $G_1$  jest definiowany jako moduł akumulacji, a przesunięty w fazie moduł  $G_2$  określany jest jako moduł stratności. W reprezentacji zespolonej oba te ortogonalne względem siebie moduły, odpowiadające za energię zgromadzoną w materiale oraz rozproszoną w wyniku tłumienia wewnętrznego (lepkości), można zapisać za pomocą jednego wzoru na tzw. moduł zespolony  $G^*$ :

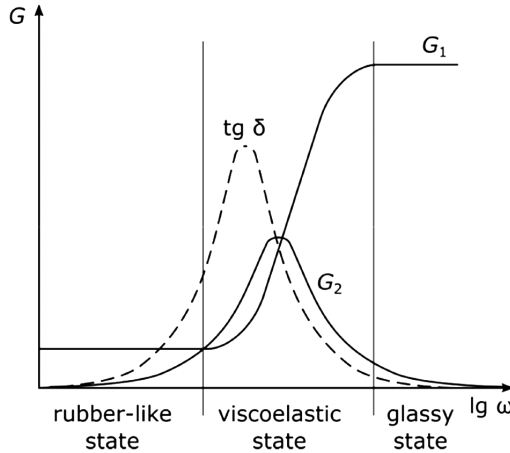
$$G_1 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(\delta), \quad G_2 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin(\delta), \quad G^* = G_1 + iG_2 \quad (2.29)$$

Charakterystyka lepko-sprężysta materiałów w warunkach obciążeń dynamicznych jest często reprezentowana przez stosunek wartości rozproszonej i zgromadzonej energii w funkcji częstotliwości:

$$\operatorname{tg}(\delta) = \frac{G_2}{G_1} \quad (2.30)$$

Zależności częstotliwościowe modułu zespolonego i jego składowych charakteryzują się typową regularnością dla większości lepko-sprężystych ciał stałych – rys. 2.17. Dla niskich i wysokich częstotliwości wartość modułu akumulacji  $G_1$

jest stała, niezależna od częstotliwości  $\omega$ , natomiast w zakresie stanu fizycznego lepkosprężystości gwałtownie rośnie. Z kolei w tym zakresie przebieg modułu stratności  $G_2$  reprezentuje typową krzywą Gaussa, co oznacza, że dla niskich i wysokich częstotliwości odkształcenie i naprężenie są praktycznie zgodne w fazie (*in-plane*). Analogiczna prawidłowość dotyczy również przebiegu współczynnika stratności  $\text{tg}(\delta)$ , jednak jego maksymalna wartość poprzedza ekstremum modułu stratności  $G_2$ .



Rys. 2.17. Zależności częstotliwościowe modułu zespolonego i jego składowych dla lepkosprężystych ciał stałych

Określenia/przymiotniki „akumulowany” i „rozproszony/stracony” mają swoje źródło w analizie pracy mechanicznej przypadającej na cykl obciążenia. Całkowitą energię odkształcenia można podzielić na składową zgodną w fazie  $W_{st}$  oraz przeciwną w fazie  $W_{dis}$ . Ich maksymalne wartości w cyklu wynoszą odpowiednio:

$$W_{st} = \frac{1}{2} \sigma_0 \varepsilon_0 \cos(\delta), \quad W_{dis} = \pi \sigma_0 \varepsilon_0 \sin(\delta) \quad (2.31)$$

Składową energii odkształcenia  $W_{st}$  można odzyskać bez strat podczas odciążania, podczas gdy składowa energii  $W_{dis}$  jest nieodwracalnie rozpraszana.

Względna wartość energii rozproszonej, określana stosunkiem  $W_{dis}/W_{st}$ , może być również wyrażona w funkcji kąta fazowego i może stanowić kolejną miarę własności lepkosprężystych materiałów:

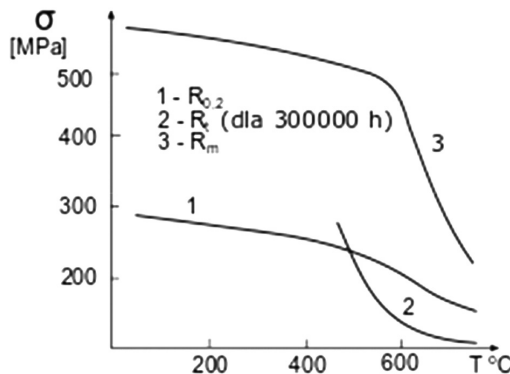
$$\frac{W_{dis}}{W_{st}} = 2\pi \text{tg}(\delta) \quad (2.32)$$

Powyższe, przedstawione w rozdziale, wielkości są często stosowane w praktyce inżynierskiej do oceny wytrzymałości i zakresu stosowalności materiałów lepkosprężystych w dynamicznej analizie mechanicznej materiałów i konstrukcji.

## 2.9. KRYTERIUM ZNISZCZENIA W WARUNKACH REOLOGICZNYCH

Własności reologiczne są indywidualną cechą materiałową zależną od czasu, temperatury, wielkości deformacji i stanu naprężenia. Dla zdecydowanej większości materiałów, szczególnie materiałów metalicznych, w temperaturach pokojowych wartości naprężeń wywołujących efekty pełzania są istotnie większe od wartości naprężeń powodujących wyczerpanie nośności plastycznej w próbach doraźnych. Stosowanie zatem kryterium wytrzymałościowego dla naprężeń dopuszczalnych mniejszych niż granica plastyczności wyczerpuje równocześnie możliwość wystąpienia pełzania. W miarę zwiększania temperatury obniża się jednak zarówno granica plastyczności, jak i granica odporności na pełzanie. Dla zwykłych niskowęglowych stali konstrukcyjnych w temperaturach już powyżej 300°C granica pełzania leży poniżej granicy plastyczności, a dla wysokowytrzymałych stali stopowych temperaturę tę przyjmuje się na poziomie 500°C. Dla materiałów i kompozytów polimerowych oraz materiałów tkankowych ta graniczna temperatura zbliża się już natomiast do temperatur eksploatacyjnych przyjmowanych jako temperatury pokojowe.

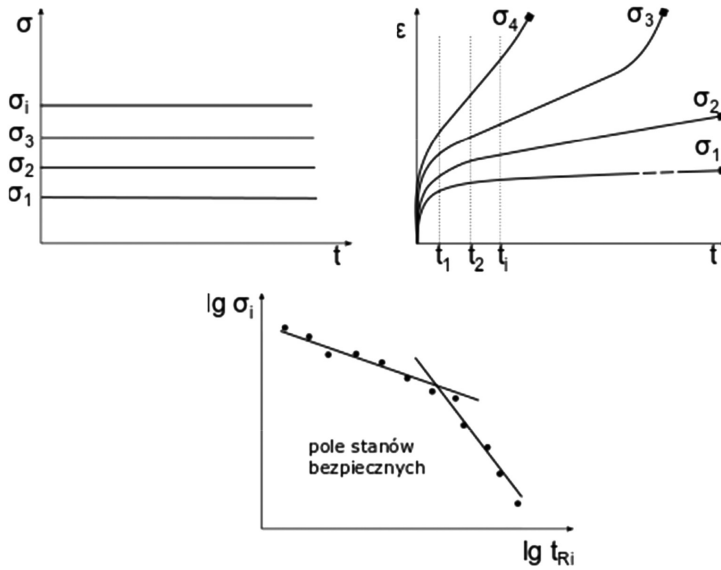
Powyższe prawidłowości ilustruje opracowany na podstawie danych przedstawionych w [5] rys. 2.18 pokazujący zależność umownej granicy plastyczności oraz wytrzymałości czasowej na pełzanie w funkcji temperatury dla wysokowytrzymałej stali stopowej o zawartości 5% Cr i 0,5% Mo. Projektowanie elementów konstrukcyjnych uwzględniające schemat zniszczenia przy pełzaniu jest standardowym wymaganiem normowym. Przykładowo, dla elementów aparatury przemysłowej, zbiorników i kotłów oczekiwany okres użytkowania przyjmowany jest na poziomie co najmniej 100 000 godzin.



Rys. 2.18. Zależność umownej granicy plastyczności (1), wytrzymałości czasowej na pełzanie (2) oraz wytrzymałości na rozciąganie (3) w funkcji temperatury dla wysokowytrzymałej stali stopowej o zawartości 5% Cr i 0,5% Mo

Zjawiska reologiczne występujące w materiałach konstrukcyjnych powodują więc, że zniszczenie materiału może wystąpić przy dowolnej wartości przyłożonego naprężenia. Warunkiem zniszczenia w warunkach reologicznych jest odpowiednio

długi czas działania przyłożonego naprężenia. Taka cecha materiałów lepkosprężystych jest najbardziej istotną różnicą ich zachowania w stosunku do materiałów o własnościach czysto sprężystych lub sprężysto-plastycznych, czyli niezależnych od czasu. Koncepcję określania wytrzymałości czasowej na pełzanie schematycznie ilustruje rys. 2.19. Krzywą wytrzymałości czasowej najczęściej przedstawia się w układzie podwójnie logarymicznym, a pole stanów bezpiecznych na ogół ekstrapoluje się dwoma liniami prostymi.

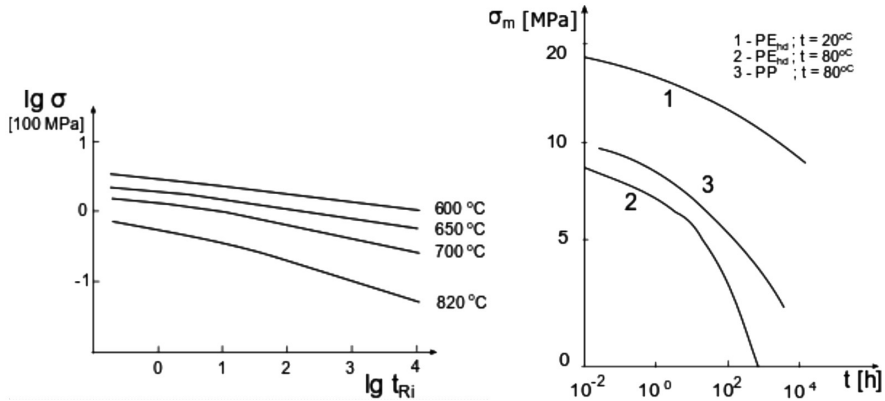


Rys. 2.19. Schemat ilustrujący określenie wytrzymałości czasowej na pełzanie oraz pola stanów bezpiecznych dla konstrukcji pracujących w warunkach reologicznych

Dla materiałów reologicznych klasycznemu naprężeniowemu warunkowi bezpieczeństwa towarzyszy również warunek wytrzymałości czasowej określający czas eksploatacji, który nie może przekroczyć czasu do zniszczenia.

$$t_{pracy} < t_{dopuszczalne} = t_R \quad (2.33)$$

Podejście takie określające możliwy schemat zniszczenia uwzględniający cechy reologiczne stanowi niezbędne kryterium wytrzymałościowe projektowania elementów konstrukcyjnych pracujących w warunkach obciążeń długotrwałych w urządzeniach przemysłu chemicznego, energetyce, przemyśle samochodowym, zbrojeniowym, w budownictwie lądowym czy geologii. Rys. 2.20 przedstawia wyniki badań zniszczenia przy pełzaniu dla stali nierdzewnej 316 (a) oraz termoplastycznych polimerów (poliamid i polipropylen) w różnych temperaturach eksploatacyjnych (b). Wykresy opracowano na podstawie danych literaturowych [5, 7].



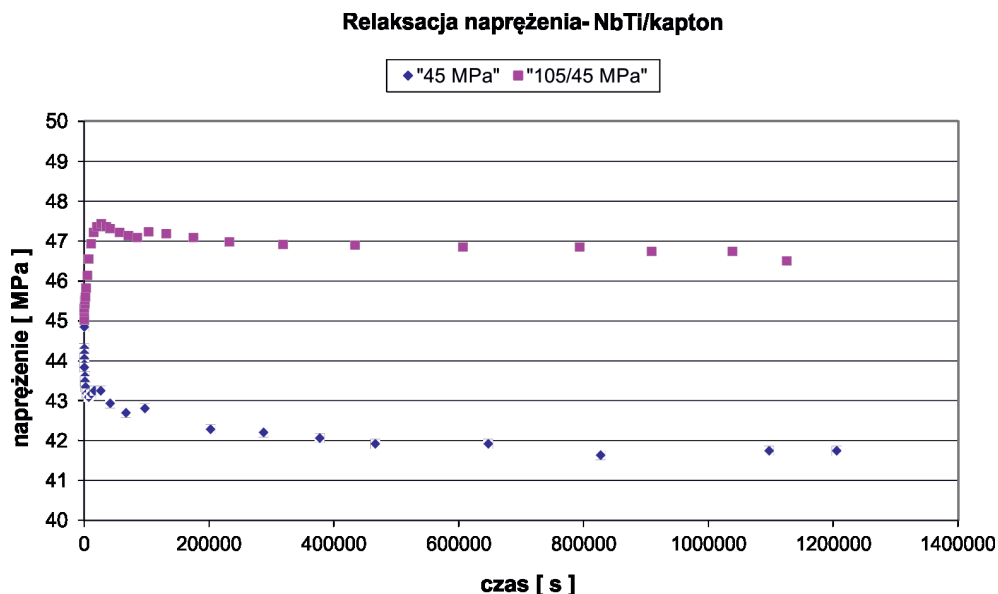
Rys. 2.20. Zależność wytrzymałości na pełzanie i czasu do zniszczenia dla stali nierdzewnej typu 316 (a) oraz poliamidu i polipropylenu w różnych temperaturach eksploatacyjnych (b)

Równocześnie ze względu na możliwe występowanie zjawisk relaksacyjnych w materiałach reologicznych w projektowaniu elementów konstrukcyjnych konieczne jest wprowadzenie warunku bezpieczeństwa ograniczającego wartości dopuszczalnych naprężeń minimalnych, tzn.:

$$\min \sigma(t) > \sigma_{min} \quad (2.34)$$

Ten dodatkowy warunek bezpieczeństwa jest szczególnie istotny w elementach pracujących w warunkach naprężeń wstępnych, takich jak połączenia kołnierzowe w rurociągach, zbiornikach ciśnieniowych, turbinach i silnikach, liny odciągowe, konstrukcje sprężone itp.

Przykładem takiego podejścia do projektowania elementów konstrukcyjnych są wyniki badań zjawiska relaksacji naprężenia w wielowarstwowych kablach wykonanych z kompozytu niobu i tytanu z przekładkami z poliimidu stosowanych w cewkach magnesów nadprzewodzących wielkiego zderzacza hydronowego (LHC) pracującego w ośrodku CERN w Genewie. Warunkiem bezpiecznej pracy w warunkach temperatur kriogenicznych takiego elementu konstrukcyjnego jest zacisk wstępny kołnierzy cewek magnesów zapewniający wartość naprężeń obwodowych nie mniejszą niż 35 MPa. Gotowe do montażu, wstępnie napięte, sekcje magnesów mogą być składowane w temperaturze pokojowej przez okres nawet dwóch lat. Wynika z tego konieczność badań i analizy efektów relaksacji w takich elementach konstrukcyjnych pracujących w warunkach stałego wymuszenia kinematycznego. Rys. 2.21 przedstawia wyniki badań relaksacji naprężenia wielowarstwowego kompozytu niobu i tytanu z przekładkami z poliimidu (kaptan) dla naprężenia początkowego 45 MPa (a) oraz tzw. dwustopniowego testu relaksacji 105/45 MPa, w którym właściwy proces relaksacji poprzedzony jest 1-godzinnym napięciem (zaciskiem) wstępnym do wartości 105 MPa, co odpowiada technologicznemu procesowi zacisku wstępnego kołnierzy cewek magnesów nadprzewodzącego.



Rys. 2.21. Krzywe relaksacji naprężenia wielowarstwowego kompozytu niobu i tytanu z przekładkami z poliimidu dla naprężenia początkowego 45 MPa (a) oraz tzw. dwustopniowego testu relaksacji 105/45 MPa

Szeroki program badawczy, uwzględniający różne warunki pracy kompozytowych bloków kabli cewek magnesów nadprzewodzących, w tym warunki naprężenia początkowego w zakresie 45–90 MPa, wykazał, że w okresie trzech lat relaksacja naprężeń nie przekracza 15% napięcia wstępnego, co zapewnia bezpieczną pracę magnesów w warunkach temperatur kriogenicznych [11].

## LITERATURA

- [1] Brinson H.F., Brinson L.C., Polymer Engineering Science and Viscoelasticity. Springer US, New York 2015.
- [2] Cho K.S., Viscoelasticity of polymers – theory and numerical algorithms. Springer, Netherlands 2016.
- [3] Christensen R.M., Theory of Viscoelasticity. 2nd edition, Dover Publications Inc., Mineola, New York 2003.
- [4] Ferry J.D., Viscoelastic properties of polymers. 3rd edition, John Wiley & Sons Inc., New York 1980.
- [5] Finnie I., Heller W.R., Creep of engineering materials. McGraw-Hill, New York-Toronto-London 1959.
- [6] Gutierrez-Lemini D., Engineering viscoelasticity. Springer US, New York 2014.
- [7] Hyla I., Tworzywa sztuczne. Własności – Przetwórstwo – Zastosowanie, PWN, Warszawa 1978.
- [8] Lakes R.S., Viscoelastic solids. CRC Press, Boca Raton 1998.
- [9] Li J.C.M., A method for describing internal stresses in materials, Canadian Journal of Physics, vol. 45, 1967.

- [10] Liber-Kneć A., Łagan S., Testing stress relaxation process of a porcine skin. *Engineering of Biomaterials* 19(134), 2016, 18–24.
- [11] Milewski G., Study of the long-term rheological behavior of electrical insulation/superconducting cable composite under pressure – Report No 6: Analysis of the stress relaxation behavior of insulated SC cables with former prestress, Cracow–Geneva CERN EST Division 2009.
- [12] Ward I.M., *Mechanical Properties of Solid Polymers*. John Wiley & Sons Inc., New York 1983.
- [13] Ward I.M., Sweeney J., *Mechanical Properties of Solid Polymers*. 3rd Edition, John Wiley & Sons Inc., New York 2012.

## ROZDZIAŁ 3

# NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA PRZY OBCIĄŻENIACH UDAROWYCH

Stefan BUĆKO

### 3.1. CEL OMÓWIENIA PROBLEMATYKI (SKUTKÓW) OBCIĄŻEŃ UDAROWYCH

Większość analiz obliczeniowych wytrzymałości materiałów bazuje na założeniu quasi-statycznego przykładania obciążeń. W konstrukcjach rzeczywistych nieuniknione jest występowanie obciążeń przykładanych z pewnymi prędkościami, które powodują przekazanie elementowi obciążanemu znacznie większej energii niż przy obciążeniu quasi-statycznym [1–3].

W treści rozdziału przewidziano prezentację podstawowych metod analizy skutków działania obciążeń udarowych oraz pomiary efektywnych rezultatów. Ważnym celem omawianych analiz i eksperymentów jest przeprowadzenie oceny wpływu dokładności modelu obliczeniowego na zgodność wyników obliczeń dla danego modelu z wynikami pomiarów na rzeczywistym elemencie konstrukcyjnym. Uzyskiwane wyniki porównań jednoznacznie preferują przyjmowanie do analizy modeli obliczeniowych możliwie dokładnie odwzorowujących rzeczywistą konstrukcję i warunki obciążenia.

#### 3.1.1. OGÓLNE ZASADY ANALIZY SKUTKÓW OBCIĄŻEŃ UDAROWYCH

Zagadnienie obciążenia udarowego (udaru) występuje wówczas, gdy prędkość rozpatrywanego elementu konstrukcyjnego lub współpracujących z nim części zmienia się w bardzo krótkim czasie o dużą (skończoną) wartość. Występujące przy tym duże przyspieszenia (lub opóźnienia) generują siły bezwładności często o dużych wartościach.

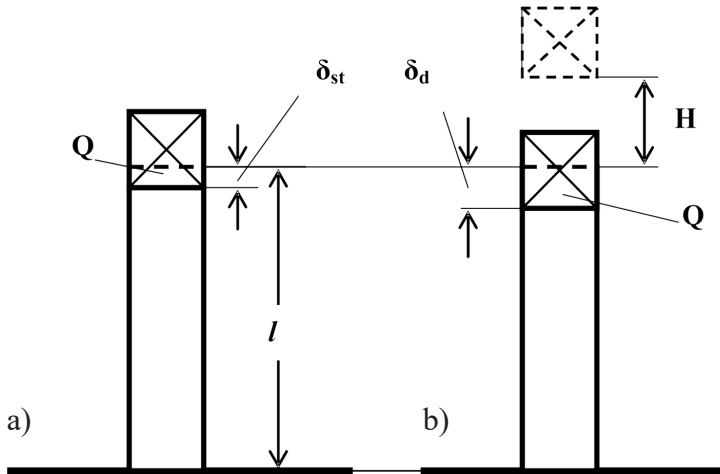
W przypadku obciążenia ciężarem  $Q$  (masą  $M$ ) uderzającym w przeszkodę, wartość siły udarowej ( $P_d$ ) może być teoretycznie wyliczona ze wzoru:

$$P_d(t) = \frac{Q}{g} \cdot a(t) = M \cdot a(t) \quad (3.1)$$



Efektywne obliczenie wartości siły  $P_d$  nie jest łatwe, ponieważ nie jest znany czas (zderzenia), tj. czas, w którym prędkość poruszającego się ciała zmienia się od wartości maksymalnej w chwili zetknięcia z uderzanym elementem (ciałem) do zera lub innej skończonej wartości – różnej od początkowej. Problematyczna jest również znajomość przebiegu funkcji  $a(t)$ . W rezultacie obliczenia odkształceń i naprężeń w elementach układów sprężystych wywołanych obciążeniami uderowymi realizuje się zazwyczaj metodami energetycznymi opartymi na zasadzie zachowania energii. Zakłada się mianowicie, że zmniejszenie energii kinetycznej poruszających się ciał (elementów konstrukcji) równe jest, przy założeniu sprężystości odkształceń, przyrostowi energii potencjalnej rozumianej tu jako energia odkształcenia sprężystego.

Analizę skutków działania obciążeń uderowych (obliczenie naprężeń i odkształceń), zmierzającą do wyprowadzenia wzorów obliczeniowych (na naprężenia i odkształcenia), warto rozpocząć od najprostszego przykładu pręta prostego (pionowego) obciążanego ciężarem  $Q$  opadającym z wysokości  $H$  – patrz rys. 3.1.



Rys. 3.1. Schematy obciążenia statycznego (a) oraz uderowego (b) ściskanego pręta

#### Założenia podstawowe:

- Zderzenie ciężaru  $Q$  z prętem jest niesprężyste (plastyczne), co oznacza, że po zetknięciu ciężaru z prętem nie wystąpi odbicie i ciężar porusza się wspólnie z czołową powierzchnią uderzonego pręta.
- W pręcie nie wystąpi fala sprężysta.
- W pierwszym przybliżeniu przyjęto, że masa pręta  $Q_p$  jest mała wobec masy ciężaru  $Q$  i może być pominięta.

Dane są wartości:  $Q$  – ciężar opadającego ciała,  $H$  – wysokość opadania,  $F$  – pole przekroju pręta,  $l$  – początkowa długość pręta,  $E$  – moduł Younga materiału pręta.

Przy quasi-statycznym obciążeniu pręta siłą o wartości  $Q$  jego skrócenie wyniesie:

$$\delta_{st} = \frac{Q \cdot l}{E \cdot F} = \frac{Q}{c}, \quad \text{gdzie } c = \frac{E \cdot F}{l}; \quad \text{zatem } Q = c \delta_{st} \quad (3.2)$$

Ciężar  $Q$ , spadając na pręt z wysokości  $H$ , powoduje jego deformację (skrócenie):

$$\delta_d > \delta_{st}$$

przy czym zakłada się, że w pręcie nie wystąpią odkształcenia plastyczne.

Zmiana (wzrost) deformacji przy obciążeniu udarowym może być scharakteryzowana tzw. współczynnikiem dynamicznym  $k_d$ :

$$k_d = \frac{\delta_d}{\delta_{st}} \quad (3.3)$$

Przy założeniu liniowej sprężystości oraz tej samej wartości modułu Younga  $E$  (badania dynamiczne potwierdzają to założenie dla metali w dużym zakresie zmian prędkości obciążania), można założyć analogiczne zależności dla naprężeń i odkształceń:

$$\varepsilon_d = k_d \cdot \varepsilon_{st}, \quad \sigma_d = k_d \cdot \sigma_{st}; \quad \left( \delta_{st} = \frac{P_{st}}{c} \quad ; \quad \delta_d = \frac{P_d}{c} \right) \quad (3.4)$$

Zmiana energii kinetycznej ciała (ciężar  $Q$ ) spadającego z wysokości  $H$  równa jest:

$$\Delta E = Q(H + \delta_d) \quad (3.5)$$

Przyrost energii potencjalnej pręta (energii sprężystej) można zaw postaci:

$$\Delta L = \frac{1}{2} \cdot P_d \cdot \delta_d = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \delta_d^2 \quad (3.6)$$

Z zasady zachowania energii otrzymuje się związek:

$$\Delta L = \Delta E \quad (3.7)$$

Podstawiając zależności (3.5) i (3.6) do wzoru (3.7) i wykorzystując zależności (3.2), otrzymuje się równanie:

$$\delta_d^2 - 2\delta_{st}\delta_d - 2\delta_{st}H = 0 \quad (3.8)$$

Pierwiastki równania (3.8) mają postać:

$$\delta_d = \delta_{st} \pm \sqrt{\delta_{st}^2 + 2\delta_{st}H} \quad (3.9)$$

Sens fizyczny prezentuje tylko pierwiastek o wartości dodatniej:

$$\delta_d = \delta_{st} + \sqrt{\delta_{st}^2 + 2\delta_{st}H} = \delta_{st} \cdot \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{st}}} \right) \quad (3.10)$$

Po przekształceniach otrzymuje się wzory do wyznaczania współczynnika dynamicznego:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{st}}} \quad , \text{ a wobec } H = \frac{v^2}{2g} \text{ mamy } k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{st}}} \quad (3.11)$$

Jeżeli przyjąć oznaczenia:

$E_0 = Q \cdot H$  – energia kinetyczna w chwili uderzenia ciężaru w pręt,

$L_{st} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \delta_{st}^2$  – energia sprężysta pręta przy obciążeniu statycznym, otrzymujemy:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_0}{L_{st}}} \quad (3.12)$$

O wpływie obciążeń uderowych na stan naprężenia najlepiej świadczy fakt, że dla  $H = 0$ , tj. przy prędkości ciężaru równej zero, otrzymuje się  $k_d = 2$ .

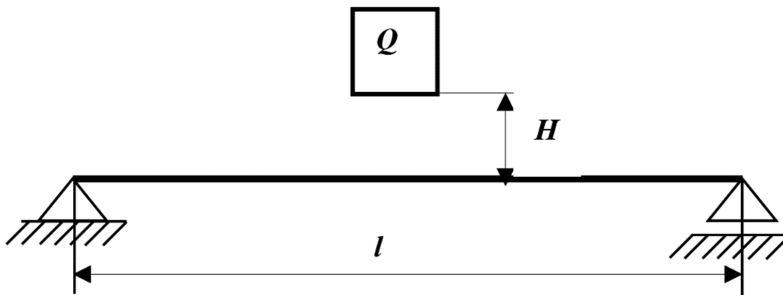
Przedstawiona wyżej teoria uderu posiada ograniczenia stosowalności związane z prędkością opadającego ciężaru i sztywnością konstrukcji (pręta).

Jeżeli  $\frac{2H}{\delta_{st}} = \frac{E_0}{L_{st}} \leq 100$ , to błąd nie przekracza 10%.

W inżynierskich obliczeniach na obciążenie uderowe przyjmuje się zazwyczaj podwyższone – w stosunku do obliczeń statycznych – wartości współczynnika bezpieczeństwa (mniejsze wartości naprężeń dopuszczalnych) ze względu na przybliżony charakter analizy.

W zagadnieniach, w których dopuszczalne jest pominięcie masy uderzanego ciała (pręta, belki zginanej), przedstawione wyżej zależności ogólne mogą być wykorzystane do obliczenia współczynnika dynamicznego.

Wyznaczanie współczynnika dynamicznego dla belki wolnopodpartej obciążanej ciężarem  $Q$  spadającym z wysokości  $H$  w połowie jej długości (rys. 3.2):



Rys. 3.2. Schemat belki wolnopodpartej

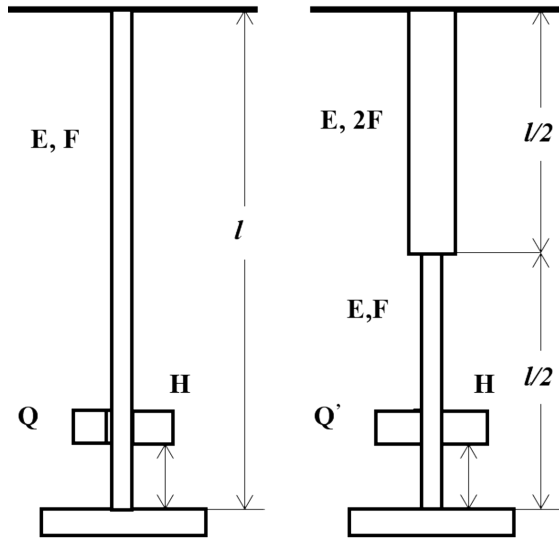
Ugięcie statyczne belki pokazanej na rys. 3.2 wynosi  $\delta_{st} = \frac{Q \cdot l^3}{48EJ}$ , zatem współczynnik  $k_d$ :

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{96EJH}{Ql^3}} \quad (3.13)$$

Przedstawiony wyżej wzór na wartość współczynnika dynamicznego potwierdza wcześniejszy wniosek, że zmniejszenie naprężeń dynamicznych można uzyskać przez zwiększenie podatności belki. Przykładem takiego rozwiązania są resory.

### Przykład

Stalowy pręt AB o stałym przekroju  $F = 20 \text{ mm}^2$ , module sprężystości  $E = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$  oraz długości  $l = 2 \text{ m}$  poddany jest uderzeniu ciężarem  $Q$  opadającym z wysokości  $25 \text{ mm}$ . Obliczyć dopuszczalną wartość ciężaru  $Q$ , jeżeli naprężenie dopuszczalne  $k = 200 \text{ MPa}$ . Jak zmieni się dopuszczalna wartość ciężaru, jeżeli górna połowa pręta będzie mieć przekrój  $F_1 = 2 \times F = 40 \text{ mm}^2$ . Wpływ masy prętów pominąć.



Rys. 3.3. Schematy prętów o różnych sztywnościach rozciągania

Warunek bezpieczeństwa dla rozpatrywanego pręta o stałym przekroju (rys. 3.3) ma postać:

$$\sigma_d = k_d \cdot \frac{Q}{F} \leq k = 200 \text{ [MPa]}, \text{ gdzie } k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{st}}}$$

W rozpatrywanym przypadku wysokość  $H$  jest duża wobec  $\delta_{st}$  i powyższy wzór można uprościć do postaci:

$$k_d \cong \sqrt{\frac{2H}{\delta_{st}}}, \text{ wobec warunku } \frac{2H}{\delta_{st}} + 1 \cong \frac{2H}{\delta_{st}}, \text{ gdzie } \delta_{st} = \frac{Q \cdot l}{E \cdot F}$$

$$k_d = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{\frac{Q \cdot l}{E \cdot F}}} = \sqrt{\frac{2H \cdot E \cdot F}{Q \cdot l}}$$

Warunek bezpieczeństwa można zatem zapisać w postaci:

$$\sigma_d = k_d \cdot \sigma_{st \max} = k_d \cdot \frac{Q}{F} \leq k, \text{ zatem } Q_{dop} = \frac{k \cdot F}{k_d}$$

a po podstawieniu wzoru na  $k_d$  otrzymuje się ostateczny wzór:

$$\frac{Q}{F} \cdot \sqrt{\frac{2H \cdot E \cdot F}{Q \cdot l}} = \sqrt{\frac{2H \cdot E \cdot Q}{F \cdot l}} = k$$

Po wykonaniu przekształceń otrzymuje się dopuszczalną wartość ciężaru  $Q$ :

$$Q = Q_{dop} = \frac{k^2 \cdot F \cdot l}{2 \cdot H \cdot E} = \frac{200^2 \cdot 20 \cdot 2000}{2 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 10^5} = 160 \text{ [N]}$$

Wydłużenie pręta przy statycznym obciążeniu siłą  $Q$  wynosi:

$$\delta_{st} = \frac{Q \cdot l}{E \cdot F} = \frac{160 \cdot 2000}{2 \cdot 10^5 \cdot 20} = 0,08 \text{ mm}$$

co uzasadnia dokonane wcześniej uproszczenie wzoru na obliczenie współczynnika dynamicznego.

Współczynnik dynamiczny wynosi:

$$k_d \cong \sqrt{\frac{2 \cdot H \cdot E \cdot F}{Q \cdot l}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 20}{160 \cdot 2000}} = 25$$

Dla drugiego pręta o zróżnicowanym przekroju otrzymuje się:

$$\delta'_{st} = \frac{Q \cdot l}{2 \cdot E \cdot F} + \frac{Q \cdot l}{2 \cdot E \cdot 2 \cdot F} = \frac{3}{4} \cdot \frac{Q \cdot l}{E \cdot F} = \frac{3}{4} \cdot \delta_{st}$$

Współczynnik dynamiczny można wyrazić zależnością:

$$k'_d \cong \sqrt{\frac{2 \cdot H}{\delta'_{st}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot H}{\frac{3}{4} \cdot \delta_{st}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot H}{\delta_{st}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot k_d$$

Dla przyjętych parametrów współczynnik dynamiczny  $k'_d$  przyjmuje teraz wartość 28,9 wobec wartości 25 dla rozpatrywanego wcześniej pręta pierwszego.

Warunek bezpieczeństwa dla drugiego pręta ma postać:

$$\sigma_{d \max} = k'_d \cdot \sigma'_{st \max} = k'_d \cdot \frac{Q'}{F} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot k'_d \cdot \frac{Q'}{F} \leq k$$

Po zastąpieniu nierówności równością otrzymuje się:

$$Q'_{dop} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{F \cdot k}{k'_d} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot Q_{dop} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 160 = 138,6 \text{ [N]}$$

Przy obciążeniu statycznym maksymalne naprężenia w obu rozpatrywanych prętach są dla równych obciążeń takie same; o ich wartości decyduje wartość siły oraz najmniejszy przekrój. Przy obciążeniach uderowych maksymalne naprężenia są różne – dowodzi tego mniejsza wartość dopuszczalnego ciężaru  $Q'_{dop} = 138,6 \text{ [N]} < Q_{dop} = 160 \text{ [N]}$ . Dla pręta o większej sztywności dopuszczalna wartość ciężaru jest mniejsza, zatem naprężenia dynamiczne dla równych ciężarów są większe (mimo równości pól najmniejszych przekrojów).

**Wykonane wyżej obliczenia dowiodły, że wzrost sztywności elementu poddanego obciążeniu uderowemu prowadzi do wzrostu wartości współczynnika dynamicznego, a zatem również do wzrostu naprężeń i odkształceń dynamicznych. Jednym z ważnych sposobów ograniczania skutków obciążeń uderowych, w postaci znacznego wzrostu naprężeń, jest zwiększanie podatności przez odpowiednie kształtowanie pręta bądź wprowadzanie dodatkowych elementów podatnych.**

### 3.2. WPŁYW MASY WŁASNEJ CIAŁA PODDANEGO OBCIĄŻENIU UDAROWEMU

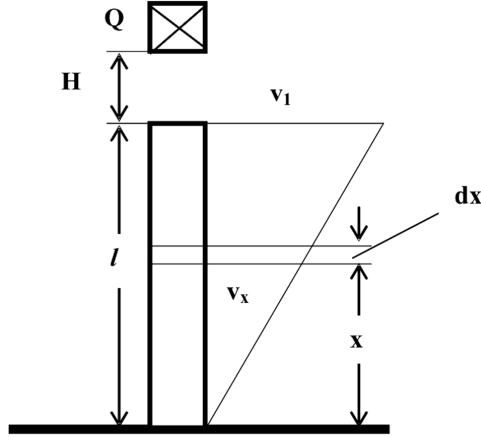
W przedstawionych wyżej zagadnieniach pominięto wpływ masy uderzanego pręta (ciała). Masa ciała poddanego uderowemu obciążeniu może mieć istotny wpływ na wartość współczynnika dynamicznego, a zatem również na wartości naprężeń i odkształceń przy udarze.

W analizie uwzględniającej wpływ masy uderzanego pręta konieczne jest rozpatrzenie dwóch etapów procesu uderzenia (zderzenia).

**Etap I rozpoczyna się w chwili kontaktu spadającego ciężaru mającego wówczas maksymalną prędkość  $v = \sqrt{2gH}$  z uderzanym elementem, a kończy się w chwili, gdy spadający ciężar oraz koniec uderzanego pręta (miejsce wzajemnego kontaktu – rys. 3.4.) osiągną nową wspólną prędkość  $v_1 < v$  i rozpoczną wspólny ruch.**

**Etap II obejmuje wspólny ruch spadającego ciężaru i końca pręta aż do zatrzymania, tj. do chwili, gdy ich wspólna prędkość osiągnie wartość zero.**

Zakłada się przy tym, że zarówno rozkład przemieszczeń dynamicznych, jak również prędkości przekrojów pręta są analogiczne do rozkładu ich przemieszczeń statycznych (rys. 3.4).



Rys. 3.4. Schemat układu do uwzględniania wpływu masy uderzanego pręta

$$u(x) = u_{\max} \cdot \frac{x}{l} \quad \text{zatem} \quad v(x) = \dot{u}(x) = \dot{u}_{\max} \cdot \frac{x}{l} = v_1 \cdot \frac{x}{l} \quad (3.14)$$

Energia kinetyczna plasterka pręta o grubości  $dx$  w odległości  $x$  wynosi:

$$dE_p = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot \left( v_1 \cdot \frac{x}{l} \right)^2 = \frac{Q_p}{2gl} \cdot dx \cdot \left( v_1 \cdot \frac{x}{l} \right)^2, \text{ gdzie } Q_p \text{ – ciężar pręta,}$$

$$E_p = \int_0^l dE_p = \frac{1}{3} \cdot Q_p \cdot \frac{v_1^2}{2g} \quad (3.15)$$

Wielkość  $\frac{1}{3} \cdot \frac{Q_p}{g}$  nazywana jest często masą zredukowaną pręta – jest to masa skupiona, która umieszczona w miejscu uderzenia posiadałaby taką energię kinetyczną jak cały poddany udarowi pręt o masie rozłożonej w sposób ciągły.

Jeżeli, w chwili rozpoczęcia pierwszego etapu uderu, energia kinetyczna ciężaru  $Q$  wynosiła:

$$E_0 = \frac{Q}{2g} \cdot v^2, \text{ gdzie } v = \sqrt{2gH}$$

to strata energii do chwili rozpoczęcia etapu drugiego, wskutek lokalnych deformacji plastycznych, wyniesie:

$$\Delta E = \frac{Qv^2}{2g} - \left( \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_p v_1^2}{2g} \right) = \frac{Q}{2g} \cdot \left[ v^2 - v_1^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_p}{Q} \right) \right] \quad (3.16)$$

Stratę energii kinetycznej przy niesprężystym zderzeniu dwóch ciał można również wyliczyć z twierdzenia Carnota-Ostrogradskiego:

**„Przy plastycznym zderzeniu dwóch ciał strata energii kinetycznej układu równa jest energii kinetycznej układu odpowiadającej straconym prędkościom”.**

W czasie trwania I etapu prędkość ciężaru  $Q$  zmienia się o  $\Delta v = v - v_1$ , natomiast prędkość czołowego przekroju pręta zmienia się o wartość  $\Delta v = 0 - v_1$ .

W myśl twierdzenia Carnota-Ostrogradskiego zmiana energii kinetycznej spadającego ciężaru wyniesie:

$$\Delta E_Q = \frac{Q}{2g} \cdot (v - v_1)^2 \quad (3.17)$$

natomiast zmiana energii kinetycznej pręta:

$$\Delta E_p = \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_p}{2g} \cdot (0 - v_1)^2 \quad (3.18)$$

całkowita zmiana energii:

$$\Delta E = \Delta E_Q + \Delta E_p = \frac{Q}{2g} \cdot \left[ v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_p}{Q} \right) \right] \quad (3.19)$$

Przyrównując straty energii kinetycznej obliczone dwiema metodami; wzory (3.16), (3.17), (3.18), (3.19) otrzymuje się:

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_p}{Q}} \quad (3.20)$$

Energia kinetyczna układu na początku etapu II wynosi:

$$E_2 = \frac{Q \cdot v_1^2}{2g} + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_p \cdot v_1^2}{2g} = \frac{Q}{2g} \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_p}{Q} \right) \cdot v_1^2 = \frac{Q \cdot v^2}{2g \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_p}{Q} \right)} \quad (3.21)$$

Współczynnik dynamiczny można wyznaczyć z zależności:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_2}{L_{st}}}, \text{ gdzie } L_{st} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \delta_{st} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2 \cdot l}{E \cdot F} \quad (3.22)$$

Po wykonaniu przekształceń otrzymuje się ostatecznie:

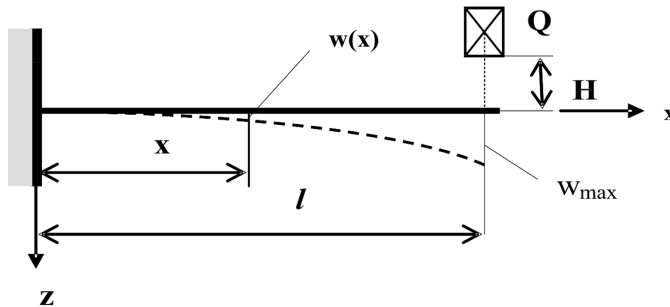
$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2E \cdot F \cdot H}{Q \cdot l \cdot \left( 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_p}{Q} \right)}} \quad (3.23)$$



Uwzględnienie masy ciała (pręta) poddanego obciążeniu uderowemu powoduje zmniejszenie wartości współczynnika dynamicznego, a w konsekwencji zmniejszenie skutków uderu, tym większe im większy jest stosunek masy uderzanego ciała do masy spadającego ciężaru.

### 3.3. UWZGLĘDNIENIE WPŁYWU MASY PRĘTA (BELKI) PRZY UDAROWYM ZGINANIU

W pierwszej części rozdziału przedstawiono zasadę obliczania współczynnika dynamicznego dla belki obciążonej spadającym ciężarem, przy założeniu nieważkości samej belki. Obecnie pokażemy metodę postępowania umożliwiającą obliczanie współczynnika dynamicznego z uwzględnieniem masy uderzanej belki wspornikowej.



Rys. 3.5. Schemat statyczny do analizy wpływu masy obciążanej uderowo belki

Moment zginający:  $M_g = -Q \cdot (l - x)$ .

Po wykonaniu całkowania równania różniczkowego osi belki otrzymuje się funkcję  $w(x)$  w postaci:

$$w(x) = \frac{Q \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot J} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{l^3} \right) = w_{\max} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{l^3} \right) \quad (3.24)$$

Prędkość dowolnego przekroju belki:

$$v_x = \frac{dw}{dt} = \frac{dw_{\max}}{dt} \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{l^3} \right) = v_k \cdot \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{l^3} \right) \quad (3.25)$$

gdzie przez  $v_k$  oznaczono prędkość uderzanego końca belki.

Energia kinetyczna elementu belki o współrzędnej  $x$  oraz grubości  $dx$  równa jest:

$$dE_b = \frac{1}{2} \cdot v_x^2 \cdot \frac{Q_b}{g \cdot l} \cdot dx = \frac{Q_b}{2gl} \cdot \left[ \frac{dw_{\max}}{dt} \cdot \frac{1}{l^3} \cdot \left( \frac{3}{2} x^2 l - \frac{1}{2} x^3 \right) \right]^2 \cdot dx$$

Energia kinetyczna całej belki może być obliczona następująco:

$$E_b = \int_0^l \frac{Q_b}{2gl} \cdot \left( \frac{dw_{\max}}{dt} \right)^2 \cdot \frac{1}{l^6} \cdot \left( \frac{3}{2}x^2l - \frac{1}{2}x^3 \right)^2 \cdot dx \quad (3.26)$$

Po wykonaniu całkowania otrzymuje się:

$$E_b = \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{2g} \cdot \left( \frac{dw_{\max}}{dt} \right)^2 \quad (3.27)$$

Na końcu I etapu uderzenia prędkość końca belki osiąga wartość  $v_1 = \frac{dw_{\max}}{dt}$  dla  $x = l$ , zatem:

$$E_b = \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{2g} \cdot v_1^2 \quad (3.28)$$

Energia kinetyczna stracona przy uderzeniu:

$$\Delta E = \frac{Q \cdot v^2}{2g} - \left( \frac{Q \cdot v_1^2}{2g} + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b \cdot v_1^2}{2g} \right) = \frac{Q}{2g} \cdot \left[ v^2 - v_1^2 \cdot \left( 1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{Q} \right) \right] \quad (3.29)$$

Strata energii utraconej przez spadający ciężar obliczona z twierdzenia Carnota wynosi  $\frac{Q}{2g} \cdot (v - v_1)^2$ . Natomiast energia nadana belce w czasie trwania pierwszego etapu wyniesie  $\frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{2g} \cdot (0 - v_1)^2$ .

Można zatem napisać równanie:

$$\frac{Q}{2g} \cdot (v - v_1)^2 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{2g} \cdot (0 - v_1)^2 = \frac{Q}{2g} \cdot \left[ v^2 - 2vv_1 + v_1^2 \cdot \left( 1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{Q} \right) \right] \quad (3.30)$$

Po wykonaniu działań otrzymuje się wzór na prędkość  $v_1$  w postaci:

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{Q}} \quad (3.31)$$

Energia kinetyczna układu na początku II etapu uderzenia, która przeobraża się w energię odkształcenia sprężystego belki – energię zginania:

$$E_2 = \frac{Q \cdot v_1^2}{2g} + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{2g} \cdot v_1^2 = \frac{Q}{2g} \cdot v_1^2 \cdot \left( 1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{Q} \right) = \frac{Q \cdot v^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{Q}} \quad (3.32)$$

Współczynnik dynamiczny można obliczyć z zależności:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_2}{L_{st}}} \quad (3.33)$$

$$L_{st} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \delta_{st} = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \frac{Q \cdot l^3}{3EJ} = \frac{Q^2 \cdot l^3}{6EJ} \quad (3.34)$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{\frac{Qv^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{Q}}}{\frac{Q^2 \cdot l^3}{6EJ}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{QH \cdot \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{Q}}}{\frac{Q^2 \cdot l^3}{6EJ}}} \quad (3.35)$$

Ostatecznie po wykonaniu działań otrzymuje się zależność:

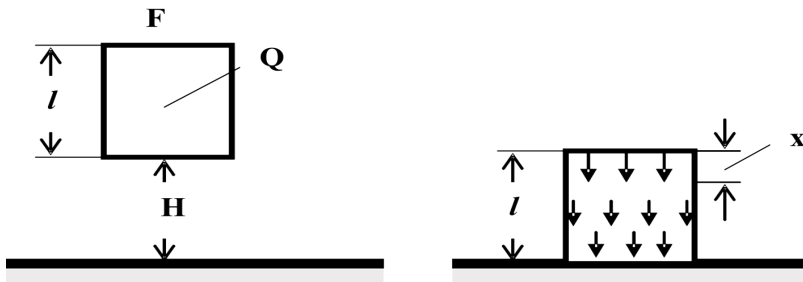
$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{6EJH}{Q \cdot l^3 \cdot \left(1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{Q_b}{Q}\right)}} \quad (3.36)$$

Analogiczny wzór dla belki wolnopodpartej przyjmuje postać:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{96EJH}{Q \cdot l^3 \cdot \left(1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{Q_b}{Q}\right)}} \quad (3.37)$$

### 3.4. UDERZENIE PRĘTA O SZTYWNĄ PŁYTĘ

Zagadnienie skutków uderzenia pręta o sztywną płytę może modelować bijak młota w końcowej fazie kucia swobodnego, kiedy odkształcenia obrabianego (kutego) elementu są już bardzo małe. Schematem obliczeniowym tego zagadnienia może być pręt o ciężarze  $Q$ , długości  $l$  i przekroju poprzecznym  $F$  spadający z wysokości  $H$  na sztywną płytę.



Rys. 3.6. Udar pręta ciężkiego o sztywną płytę

W chwili zetknięcia z płytą pręt posiada energię kinetyczną:

$$E_0 = Q \cdot H = \frac{Q}{2g} \cdot v^2$$

która po zderzeniu z płytą zamieni się w energię odkształcenia sprężystego pręta.

Naprężenia w przekroju poprzecznym pręta o współrzędnej  $x$  można wyrazić przez naprężenie maksymalne działające w przekroju stykającym się z uderzaną płytą:

$$\sigma_d(x) = \sigma_{d \max} \cdot \frac{x}{l}$$

Energia potencjalna odkształcenia sprężystego odcinka pręta o długości  $dx$  wynosi:

$$dL_d = \frac{\sigma_d^2(x)}{2E} \cdot F \cdot dx = \frac{\sigma_{d \max}^2}{2E} \cdot F \cdot \frac{x^2}{l^2} \cdot dx$$

Energia potencjalna całego pręta:

$$L_d = \int_0^l \frac{F \cdot \sigma_{d \max}^2}{2El^2} x^2 dx = \frac{\sigma_{d \max}^2}{6E} \cdot F \cdot l$$

Po porównaniu energii potencjalnej z energią kinetyczną pręta otrzymujemy:

$$\sigma_{d \max} = \sqrt{\frac{6E \cdot E_0}{F \cdot l}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2EQH}{F \cdot l}}$$

**Maksymalne naprężenia dynamiczne w pręcie uderzającym o sztywną płytę odpowiadają naprężeniom dynamicznym, jakie powstałyby przy uderzeniu w ten pręt ciężarem o trzykrotnie większej energii kinetycznej.**

## LITERATURA

- [1] Katarzyński S., Kocańda S., Zakrzewski M.: Badanie własności mechanicznych metali. PWN, Warszawa 1967.
- [2] Pisarenko G.S. (red.): Soprotiwlenije materialów, Kijów 1973.
- [3] Sharpe W.N. Jr. (red.): Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics, Springer Science + Business Media, New York 2008.

## ROZDZIAŁ 4

# WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ WŁASNYCH METODĄ TREPANACJI OTWOROWEJ

Stefan BUĆKO, Henryk JODŁOWSKI

### 4.1. WPROWADZENIE

Jednym z istotnych problemów dla konstruktorów maszyn oraz dużych konstrukcji stalowych jest znajomość wartości naprężeń własnych wywołanych procesem technologicznym (np. spawanie, odlewanie, montaż itp.) lub warunkami eksploatacyjnymi. Badania dowodzą, że wartości naprężeń spawalniczych mogą być bliskie granicy plastyczności łączonego materiału. Stwierdzono w badaniach i obserwacjach eksploatacyjnych, że w większości konstrukcji obciążonych cyklicznie naprężenia własne obniżają istotnie wytrzymałość zmęczeniową. Naprężenia spawalnicze, a także odlewnicze mogą rzutować na zachowanie stabilności kształtu i wymiarów konstrukcji. Znane i stosowane są również zabiegi technologiczne, jak np. dogniatanie, kulowanie, rolowanie, hartowanie powierzchniowe, które przez wprowadzenie naprężeń ściskających w strefie powierzchniowej zapewniają podwyższenie wytrzymałości zmęczeniowej, przy czym kontrola tych zabiegów metodami klasycznymi jest trudna. Równocześnie analiza teoretyczna wpływu naprężeń własnych na trwałość zmęczeniową pozwala wnioskować, że w niektórych wzajemnych konfiguracjach stanów naprężeń własnych oraz roboczych (wywołanych obciążeniami) spadek wytrzymałości zmęczeniowej może być niewielki i pominięty w obliczeniach technicznych, co wykazano w pracy [3].

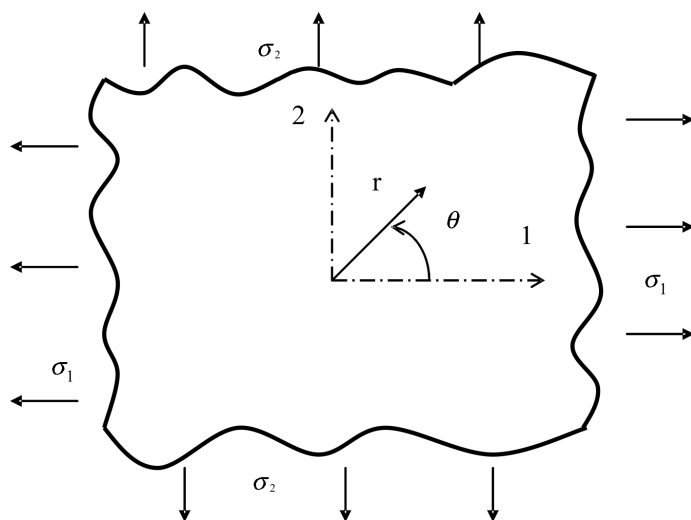
### 4.2. PODSTAWY TEORETYCZNE METODY TREPANACJI OTWOROWEJ

Rozpatrujemy problem nieograniczonej cienkiej tarczy obciążonej na brzegach siłami  $P_1$  oraz  $P_2$  rozłożonymi wzdłuż brzegów w sposób ciągły tak, że na brzegach działają naprężenia  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$ , co pokazano na rys. 4.1. Istotą metody trepanacji otworowej jest nawiercanie w badanej tarczy małego otworu i pomiar przyrostów odkształceń radialnych, jakie wystąpią wskutek nawiercenia otworu, w jego otoczeniu. Na podstawie zmierzonych przyrostów odkształceń oraz analizy stanu naprężenia i stanu odkształcenia w strefie nawiercanego otworu można wyznaczyć naprężenia w miejscu wiercenia otworu, jakie występowały przed jego nawierceniem.

Naprężenia w tarczy obciążonej na brzegach wzdłuż osi 1 i 2 naprężeniami  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  można wyrazić, w układzie współrzędnych biegunowych, wzorami (4.1).

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta, & \sigma_\theta &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\theta\end{aligned}\quad (4.1)$$

Przez nawiercenie w tarczy otworu o promieniu  $r_0$ , bardzo małym w porównaniu z jej wymiarami, następuje w otoczeniu otworu zmiana stanu naprężenia i stanu odkształcenia wskutek wywołanej operacją wiercenia koncentracji naprężeń. Dla stanu jednoosiowego rozciągania, np. w kierunku 1, współczynnik koncentracji naprężeń osiąga wartość  $\alpha_k = 3,0$ . Rozkład ekstremalnych naprężeń stycznych, w płaszczyźnie tarczy,  $\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_2$  wokół otworu w tarczy poddanej jednoosiowemu rozciąganiu i w płaszczyźnie (1, 2) przedstawiono na rys. 4.2. Należy jednak podkreślić, że w okolicy otworu maksymalne naprężenie styczne działa pod kątem  $\sim 45^\circ$  do płaszczyzny środkowej tarczy i jest równe  $\tau_{\text{ekstr}} = 0,5 \cdot \sigma_1$  wobec faktu, że  $\sigma_3 = 0$ , natomiast  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  są dodatnie.



Rys. 4.1. Tarcza obciążona na brzegach naprężeniami  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  wraz z przyjętym układem współrzędnych biegunowych

Na walcowej powierzchni, która stała się swobodną powierzchnią boczną otworu, działały przed nawierceniem naprężenia określone wzorami (4.1). Nawiercenie otworu spowodowało likwidację tych naprężeń oraz zjawisko koncentracji naprężeń, a zatem w strefie otworu wytworzył się nowy stan naprężenia i związany z nim nowy stan odkształcenia. Wspomniane stany zostały wyznaczone przez G. Kirscha

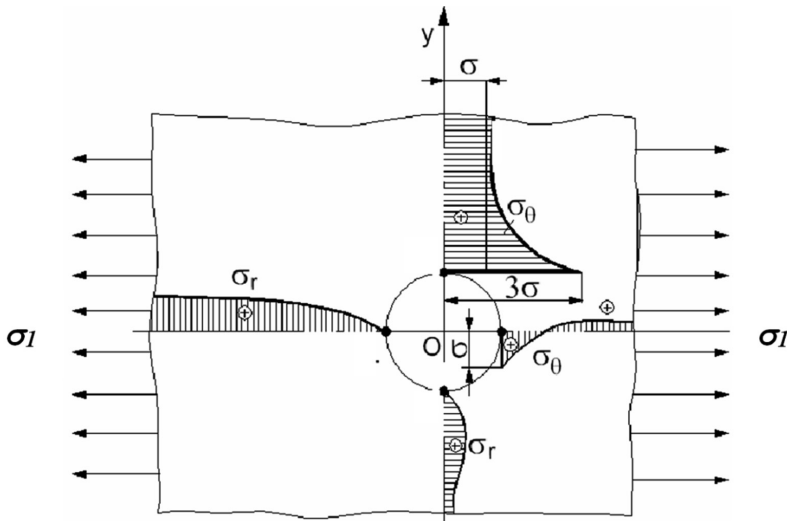
(1898) przez superpozycję rozwiązania Lamè (symetria kołowa) i rozwiązania dla antysymetrycznego obciążenia wewnętrznej powierzchni otworu przy wykorzystaniu funkcji naprężeń Airy [5]. Rozwiązanie dla tarczy obciążonej w dwóch kierunkach można uzyskać przez superpozycję przy odpowiedniej zmianie indeksów.

Dla rozpatrywanego zagadnienia tarczy, obciążonej na brzegach naprężeniami  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  z wykonanym małym otworem o promieniu  $r_0$ , naprężenia w punkcie o współrzędnych  $r$  i  $\theta$  opisane są wzorami:

$$\sigma_r'' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left( 1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left( 1 + \frac{3r_0^4}{r^4} - \frac{4r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\theta$$

$$\sigma_\theta'' = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left( 1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \left( 1 + \frac{3r_0^4}{r^4} \right) \cos 2\theta$$
(4.2)

W rozważanym punkcie występuje również naprężenie  $\tau_{r\theta}$ , które nie będzie jednak użyteczne w prowadzonej analizie, gdyż nie rzutuje na wartości  $\varepsilon_r$  i  $\varepsilon_\theta$ .



Rys. 4.2. Rozkład naprężeń wokół małego otworu w rozciąganej szerokiej i cienkiej tarczy wg rozwiązania Kirscha

Wskutek nawiercenia otworu w tarczy pole naprężeń wokół otworu zmienia się od początkowych wartości  $\sigma_r$  i  $\sigma_\theta$  określonych wzorami (4.1) do wartości  $\sigma_r''$  i  $\sigma_\theta''$  zdefiniowanych wzorami (4.2). Różnice tych naprężeń:

$$\sigma_r' = \sigma_r'' - \sigma_r \quad \text{oraz} \quad \sigma_\theta' = \sigma_\theta'' - \sigma_\theta$$
(4.3)

określają zmianę stanu naprężenia spowodowaną nawierceniem otworu. Po podstawieniu odpowiednich wzorów i wykonaniu przekształceń otrzymuje się:

$$\begin{aligned}\sigma'_r &= -\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{r_0^2}{r^2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \left( \frac{3r_0^4}{r^4} - \frac{4r_0^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma'_\theta &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \frac{3r_0^4}{r^4} \cos 2\theta\end{aligned}\quad (4.4)$$

Z prawa Hooke'a dla płaskiego stanu naprężenia wynikają wzory na odkształcenia:

$$\varepsilon'_r = \frac{1}{E} (\sigma'_r - \nu \sigma'_\theta) \quad \text{oraz} \quad \varepsilon'_\theta = \frac{1}{E} (\sigma'_\theta - \nu \sigma'_r) \quad (4.5)$$

W metodzie trepanacji otworowej stosuje się pomiar przyrostów odkształceń radialnych, to znaczy  $\varepsilon'_r$  według wzorów (4.5). Należy jednak pamiętać, że czujnik uśrednia wartość odkształcenia na odcinku jego bazy pomiarowej. W celu zwiększenia dokładności wyników zalecano definiować mierzoną czujnikiem wartość odkształcenia jako:

$$\varepsilon'_{rm} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \varepsilon'_r dr$$

gdzie  $r_1$  i  $r_2$  są promieniami początku i końca czujnika.

Przy współcześnie stosowanych czujnikach o małej bazie pomiarowej powyższa operacja nie jest już uzasadniona.

Przy takim założeniu mierzoną wartość odkształcenia radialnego można zapisać zależnością:

$$\varepsilon_{rm} = A_1 \cdot \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{E} + B_1 \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{E} \cos 2\theta \quad (4.6)$$

gdzie parametry  $A_1$  i  $B_1$  określone są wzorami (4.7):

$$A_1 = -\frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{r_0^2}{r_1 \cdot r_2} \quad \text{oraz} \quad B_1 = \frac{2r_0^2}{r_1 \cdot r_2} \left[ -1 + \frac{1+\nu}{4} \frac{r_0^2 (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)}{r_1^2 \cdot r_2^2} \right] \quad (4.7)$$

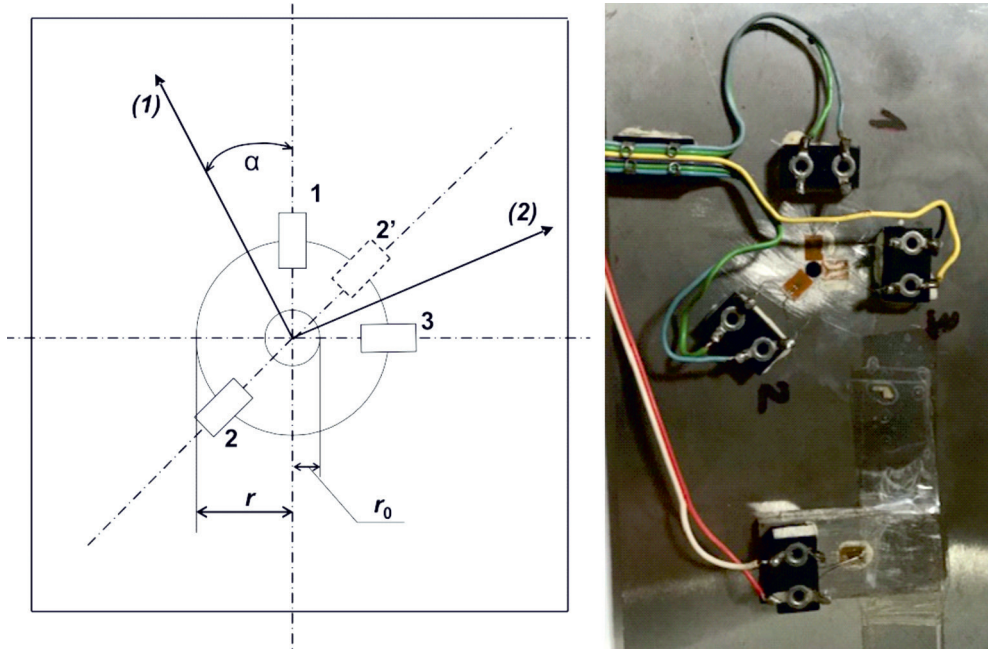
Lub przy założeniu, że  $r_1$  jest bliskie  $r_2$ , zatem  $r_1 = r_2 = r$ , wyrażenia (4.7) przyjmują postać:

$$A_1 = -\frac{1+\nu}{2} \cdot \frac{r_0^2}{r^2} \quad \text{oraz} \quad B_1 = 2 \frac{r_0^2}{r^2} \left( -1 + 3 \frac{1+\nu}{4} \cdot \frac{r_0^2}{r^2} \right) \quad (4.8)$$

Jeżeli znane są kierunki główne naprężeń własnych (co oznacza znajomość kąta  $\theta$ ), wówczas do określenia wartości naprężeń własnych  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  wystarczy znajomość wartości odkształceń radialnych  $\varepsilon_{rm}$  w dwóch kierunkach. Najczęściej kierunki główne nie są znane i dla określenia naprężeń  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  oraz kąta  $\theta$  konieczne jest



zmierzenie odkształceń radialnych w trzech różnych kierunkach. Zazwyczaj czujniki nakleja się pod kątami, które umownie można określić jako  $\alpha$ ,  $\alpha + 45^\circ$ ,  $\alpha + 90^\circ$ , gdzie  $\alpha$  oznacza kąt między czujnikiem 1 i jednym z kierunków głównych naprężeń własnych. Oznaczając zmierzone czujnikami zmiany odkształceń w tych kierunkach odpowiednio:



Rys. 4.3. Rozmieszczenie czujników wokół otworu

$\varepsilon_{r1}$  – odkształcenie zmierzone w kierunku odpowiadającym kątowi  $\alpha$ ,  
 $\varepsilon_{r2}$  – odkształcenie zmierzone w kierunku odpowiadającym kątowi  $\alpha + 45^\circ$ ,  
 $\varepsilon_{r3}$  – odkształcenie zmierzone w kierunku odpowiadającym kątowi  $\alpha + 90^\circ$

oraz rozwiązując układ równań (4.5) względem naprężeń i odkształceń własnych, przy założeniu parametrów  $A_1$  i  $B_1$  w postaci określonej wzorami (4.8), otrzymuje się wzory na odkształcenia w tarczy przed nawierceniem otworu w postaci:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= C_1 \varepsilon_{r1} + C_2 (\varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r1}) \\ \varepsilon_2 &= C_1 \varepsilon_{r2} + C_2 (\varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r1}) \\ \varepsilon_3 &= C_1 \varepsilon_{r3} + C_2 (\varepsilon_{r3} + \varepsilon_{r1})\end{aligned}\quad (4.9)$$

gdzie parametry  $C_1$  i  $C_2$  opisane są wzorami:

$$C_1 = -\frac{1+\nu}{1-3\nu} \frac{r_0^2}{r^2} \quad \text{oraz} \quad C_2 = \frac{\nu(3-\nu)}{(1+\nu)(1-3\nu)} \frac{r^2}{r_0^2} \quad (4.10)$$

Dalsze postępowanie jest już klasyczne dla analizy płaskiego stanu naprężenia przy znanych wartościach odkształceń w trzech kierunkach na płaszczyźnie oraz założeniu liniowej zależności między odkształceniami i naprężeniami, które to założenie jest w tym przypadku oczywiste.

### 4.3. TECHNOLOGIA I METODYKA REALIZACJI POMIARÓW W METODZIE TREPANACJI OTWOROWEJ

Po zdefiniowaniu miejsca pomiaru naprężeń własnych należy przeprowadzić operację trasowania środka otworu oraz miejsc naklejenia czujników rezystancyjnych.

Następnym krokiem jest naklejenie czujników, połączenie ich z aparaturą pomiarową oraz ustalenie stanu zerowego. Należy pamiętać, że jest to umowny stan zerowy, gdyż naprężenia w badanym elemencie nie są równe zero, lecz  $\sigma_1, \sigma_2$ .

Kolejną czynnością jest nawiercenie otworu o założonym promieniu  $r_0$  (konieczne jest wykonanie pomiaru efektywnej średnicy otworu po nawierceniu i wprowadzenie ewentualnej poprawki do wartości  $r_0$ ) oraz pomiar przyrostów odkształceń wykazanych przez czujniki pomiarowe. Dla elementów o małej grubości otwór może być przelotowy, natomiast dla elementów o dużej grubości wystarcza nawiercenie otworu o głębokości  $\approx 3 \cdot r_0$  (doświadczenia wykazały, że jest to głębokość wystarczająca dla wyznaczenia naprężeń na powierzchni elementu).

Kończym etapem wyznaczania naprężeń własnych jest wykonanie obliczeń według schematu omówionego w punkcie 4.2.

Obecnie firmy wytwarzające czujniki rezystancyjne i aparaturę do pomiarów (np. Vishay) oferują zestawy do metody trepanacji otworowej w postaci układu czujników na wspólnej podkładce z zaznaczonym środkiem otworu oraz urządzenie do precyzyjnego nawiercania otworu.

Ważnym elementem związanym ze stosowaniem metody trepanacji otworowej jest znajomość zakresu ważności tej metody opartej, jak pokazano wyżej, na rozwiązaniach klasycznej teorii sprężystości. Rozkłady naprężeń wokół małych otworów wskazują na występowanie silnej koncentracji naprężeń na brzegu otworu. Dla tarczy rozciąganej jednoosiowo współczynnik spiętrzenia naprężeń wynosi 3,0. Wydawałoby się zatem, że dla naprężeń nominalnych  $\sigma_1 = \frac{1}{3} R_e$  powinno rozpocząć się uplastycznienie materiału i podstawowe wzory metody powinny utracić ważność. Przeprowadzone badania doświadczalne wykazały, że sprężystość odkształceń wokół otworu zachowana jest do wartości naprężenia nominalnego  $\sigma_1 = 0,7R_e$ , a nawet nieco powyżej tej wartości [1]. Jest to specyficzna cecha materiałów ciągliwych w przypadku występowania dużego gradientu naprężeń. Należy zatem

przyjąć, że stosowanie metody trepanacji otworowej jest w pełni uprawnione, jeżeli naprężenia nominalne (własne) nie przekraczają 70% górnej granicy plastyczności materiału.

Rozwiązanie zagadnienia wyznaczenia naprężeń w tarczy na podstawie pomiarów odkształceń wokół otworu różni się od problemu rozwiązywanego w klasycznej metodzie trepanacji stanem naprężenia w tarczy w czasie wykonywania otworu. Z przytoczonych w p. 4.2 wzorów należy odrzucić wzory (4.1), gdyż naprężenia  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  przy wierceniu otworu równe są zero i nie zachodzi potrzeba wykonywania superpozycji dwóch pól naprężeń. Aktualne pozostają wzory opisujące stan naprężenia wokół otworu w tarczy obciążonej na brzegach naprężeniami  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , tj. wzory (4.2). Wykorzystując prawo Hooke'a w postaci (4.4) oraz wzory (4.2), otrzymuje się wzór opisujący odkształcenie radialne w dowolnym kierunku w strefie otworu:

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2E} \left[ (1 - \nu) - \frac{1 + \nu}{\rho^2} \right] + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2E} \left[ (1 + \nu) + \frac{3(1 + \nu)}{\rho^4} - \frac{4}{\rho^2} \right] \cos 2\alpha \quad (4.11)$$

gdzie:  $\sigma_1, \sigma_2$  – naprężenia na brzegach tarczy,  $\rho = \frac{r}{r_0}$  bezwymiarowa współrzędna promieniowa punktu,  $\alpha$  – kąt między promieniem czujnika 1 oraz kierunkiem głównym 1.

Wzór na odkształcenie radialne wygodnie jest zapisać w postaci:

$$\varepsilon_r = A(\sigma_1 + \sigma_2) + B(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha \quad (4.12)$$

gdzie:

$$A = \frac{1}{2E} \left( 1 - \nu - \frac{1 + \nu}{\rho^2} \right), B = \frac{1}{2E} \left( 1 + \nu + \frac{3(1 + \nu)}{\rho^4} - \frac{4}{\rho^2} \right) \quad (4.13)$$

Wykorzystując wzór (4.12), można zapisać wzory na odkształcenia radialne w kierunkach naklejonych czujników pomiarowych, zgodnie z rys. 4.3. Zakładając, że kąt między czujnikiem 1 i kierunkiem działania  $\sigma_1$  równy jest  $\alpha_0$ , otrzymuje się równania:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_r(\alpha) &= A(\sigma_1 + \sigma_2) + B(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_r(\alpha + 45) &= A(\sigma_1 + \sigma_2) - B(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_r(\alpha + 90) &= A(\sigma_1 + \sigma_2) - B(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (4.14)$$

Rozwiązując układ równań (4.14) ze względu na  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  oraz  $\alpha$ , otrzymuje się wzory na naprężenia  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  oraz kąt  $\alpha$  w postaci:

$$\sigma_{\max} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{4A} + \frac{1}{4B} \sqrt{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_3 + \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2)^2} \quad (4.15)$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{4A} - \frac{1}{4B} \sqrt{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_3 + \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2)^2} \quad (4.16)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{\varepsilon_3 - \varepsilon_1} \quad (4.17)$$

## LITERATURA

- [1] Bućko S., Jodłowski H., Metoda trepanacji otworowej – podstawy teoretyczne i praktyka jej stosowania w pomiarach naprężeń. Czasopismo Techniczne z. 13-M, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2004.
- [2] Handbook on experimental mechanics. Edited by Albert S. Kobayashi. PRENTICE HALL. INC. Englewood Cliffs. New Jersey 07632, 1987 (Ros. Eksperimentalnaja Mechanika, Moskwa „MIR” 1990).
- [3] Gurney T.R., Zmęczenie konstrukcji spawanych, WNT, Warszawa 1973.
- [4] Instrukcja Firmy Vishay.
- [5] Kirsch G., “Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre,” Zentralblatt Verlin Deutscher Ingenieure, Vol. 42, 1898, s. 797–807.

## ROZDZIAŁ 5

# ANALIZA NIESTANDARDOWYCH PRZYKŁADÓW WSPÓŁDZIAŁANIA SIŁ POPRZECZNYCH I MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH W BELKACH

Stefan BUĆKO, Agnieszka CHOJNACKA-BROŻEK

### 5.1. WPROWADZENIE

Celem rozdziału jest uzasadnienie wprowadzenia precyzyjnej (poprawnej) definicji zginania prostego w przypadku równoczesnego działania momentu zginającego i siły poprzecznej oraz pokazanie możliwych konsekwencji wynikających ze stosowania nieprecyzyjnej definicji przytoczonej poniżej w punkcie B.

**A. Zginanie czyste jest proste**, jeżeli płaszczyzna obciążenia pokrywa się z płaszczyzną główną belki.

W tym przypadku (tj. dla zginania czystego) nie jest wymagane, aby przekrój poprzeczny belki posiadał płaszczyznę symetrii.

**B. Zginanie czyste jest ukośne**, jeżeli płaszczyzna obciążenia nie jest płaszczyzną główną belki, ale zawiera oś belki.

Zginanie z udziałem siły poprzecznej (tzw. zginanie poprzeczne) przy spełnieniu warunków zawartych w p. A może nie być zginaniem prostym, a dodatkowo siły poprzeczne towarzyszące momentowi zginającemu mogą generować skręcanie, czyli pojawienie się w belce efektów giętno skrętnych zwiększających wyczerpanie materiału.

**C. Zginanie poprzeczne jest zginaniem prostym**, jeżeli belka posiada co najmniej jedną płaszczyznę symetrii i płaszczyzna obciążenia pokrywa się z tą płaszczyzną symetrii.

W każdym innym przypadku zginanie poprzeczne będzie zginaniem ukośnym często z dodatkowym udziałem momentów skręcających wygenerowanych przez siły poprzeczne, przy czym momenty te nie zostaną ujawnione przy redukcji sił do środków ciężkości przekrojów poprzecznych belki. Zjawiska towarzyszące takiemu zginaniu są szczególnie znaczące i groźne dla belek z przekrojami profilowanymi.

W celu eliminacji omówionych wyżej niekorzystnych zjawisk należy poprowadzić płaszczyznę obciążenia przez punkty nazywane „środkami sztywności” (zwanymi

także „środkami ścinania”), leżące w belkach pryzmatycznych na linii równoległej do osi belki. Przyłożenie obciążenia belki w jej płaszczyźnie symetrii oczywiście eliminuje wspomniane efekty, zapewniając wystąpienie zgięcia prostego.

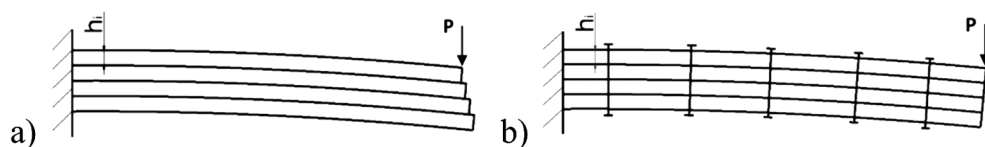
W następnych punktach niniejszego rozdziału przedstawiono podstawy wyznaczania „środka ścinania” oraz wartości ewentualnego momentu skręcającego wywołanego przyłożeniem sił obciążających w płaszczyźnie nieprzechodzącej przez środki ścinania.

Ze względu na powszechnie stosowaną optymalizację przekrojów (minimalizację masy konstrukcji) wykorzystywanie przekrojów profilowanych jest coraz powszechniejsze. Znajomość rzeczywistego wpływu sił poprzecznych na stany naprężenia belek obciążonych, nawet w płaszczyznach głównych, ale poza płaszczyznami symetrii, jest zagadnieniem o istotnym znaczeniu.

## 5.2. PODSTAWOWE ZASADY WYZNACZANIA NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH W SYMETRYCZNYCH PRZEKROJACH BELEK PODDANYCH ZGIĘCIU PROSTEMU W ZGINANIU POPRZECZNYM

Poniżej pokazano skróconą informację dość powszechnie znanych zasad obliczania naprężeń stycznych w przekrojach belek z co najmniej jedną płaszczyzną symetrii, w której działają siły poprzeczne.

W przypadku zginania poprzecznego i prostego belek o przekrojach zwartych (prostokąt, koło itp.) w przekroju poprzecznym muszą wystąpić naprężenia styczne o kierunku siły poprzecznej. Naprężenia styczne, wynikające z zasady równowagi naprężeń stycznych w przekrojach wzajemnie prostopadłych, działające w przekrojach prostopadłych do kierunku sił stycznych, wymuszają współpracę warstw belki równoległych do wspomnianych przekrojów. Funkcję spełnianą przez te naprężenia styczne pokazano na rys. 5.1a oraz 5.1b – w przykładowej belce na rys. 5.1b nity łączące ze sobą poszczególne pasy (warstwy) belki i wymuszające ich współpracę.



Rys. 5.1. Ilustracja wpływu naprężeń stycznych na sztywność belki zginanej siłami poprzecznymi

W przypadku belki złożonej z kilku warstw niezwiązanych ze sobą, każda z warstw zachowuje się jak samodzielna belka, a sztywność giętna zestawu jest proporcjonalna do sumy  $\sum h_i^3$ . W przypadku kiedy warstwy są powiązane (np. nitami), poszczególne warstwy muszą spełniać warunki ciągłości odkształceń osiowych

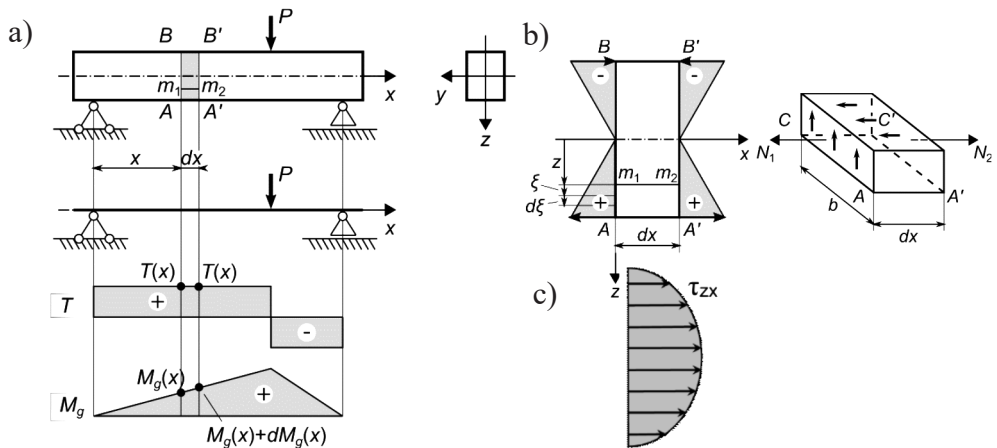
(rys. 5.1b) i płaszczyzny przekrojów poprzecznych. W rezultacie sztywność giętą takiej belki (kiedy warstwy są zmuszone do współpracy) jest proporcjonalna do  $(\sum h_i)^3$  i jest wielokrotnie większa od poprzedniej.

### 5.2.1. WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH W BELKACH O PRZEKROJU PROSTOKĄTNYM

Dla wyznaczenia rozkładu naprężeń stycznych  $\tau_{zx}$  należy z odcinka belki o długości  $dx$  odciąć plaster płaszczyzną równoległą do płaszczyzny  $(x, y)$  i oddaloną o  $z$  od osi obojętnej zginania  $y$ . Na powierzchni czołowe rozpatrywanego odcinka działają naprężenia wywołane zginaniem momentami  $M_g$  oraz  $M_g + dM_g$ , a także siła styczna do powierzchni o normalnej  $z$ , będąca wypadkową naprężeń stycznych  $\tau_{zx}$  na powierzchni odcięcia:

$$T_x = T = \tau_{zx} \cdot b \cdot dx \quad (5.1)$$

równą sile poprzecznej w przekroju belki (rys. 5.2a i b).



Rys. 5.2. Wyznaczanie naprężeń stycznych w przekroju prostokątnym belki poddanej zginaniu poprzecznemu: a) schemat statyczny, przekrój oraz wykresy  $M_g$  i  $T$ , b) zasada wyznaczania naprężeń  $\tau_{zx}$ , c) rozkład naprężeń  $\tau_{zx}$  w przekroju prostokątnym

Równanie równowagi odciętego paska belki można zapisać, przy założeniu niezależności poszczególnych wielkości od zmiennej  $y$ , w postaci:

$$\iint_{F_1} \frac{M_g}{J_y} \zeta \cdot dF - \iint_{F_1} \frac{M_g + dM_g}{J_y} \zeta \cdot dF + \tau_{zx} \cdot b \cdot dx = 0 \quad (5.2)$$

Po rozwiązaniu powyższego równania otrzymuje się wzór na naprężenia  $\tau_{zx}$ :

$$\tau_{zx} = \frac{T \cdot S_y(z)}{b \cdot J_y} \quad \text{gdzie} \quad S_y(z) = \iint_{F_1} \zeta \cdot dF \quad (\text{jest niezależne od zmiennej } y) \quad (5.3)$$

- $S_y(z)$  – moment statyczny odciętej części przekroju względem osi obojętnej  $y$ ,  
 $J_y$  – moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej zginania,  
 $F_1$  – pole przekroju.

Dla prostokąta naprężenia  $\tau_{zx}$  mają rozkład paraboliczny (rys. 5.2c), osiągając ekstremum w osi obojętnej zginania oraz wartość 0 na obu bokach równoległych do osi (obojętnej)  $y$ .

W przypadku belek o przekrojach zwartych (np. prostokąt, koło itp.) naprężenia styczne praktycznie nie mają wpływu na maksymalne wyężenie materiału belki. Osiągają ekstremum w osi obojętnej zginania, co wskazuje, że tylko w nieproporcjonalnie krótkiej belce wartość tych naprężeń może mieć istotne znaczenie, chociaż są to przypadki bliskie tzw. „ścięciu technicznemu”.

Dla dalszych rozważań uzasadnione jest pokazanie analizy oraz rozkładów naprężeń stycznych w przekroju dwuteowym. Dwuteownik o profilu walcowanym można, na potrzeby przybliżonej analizy, aproksymować układem prostokątów, co pokazano na rys. 5.3a.

### 5.3. WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH $\tau_{zx}$ ORAZ $\tau_{yx}$ W BELKACH O PRZEKROJU W KSZTAŁCIE DWUTEOWNIKA

#### 5.3.1. WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ $\tau_{zx}$ W ŚRODNIKU

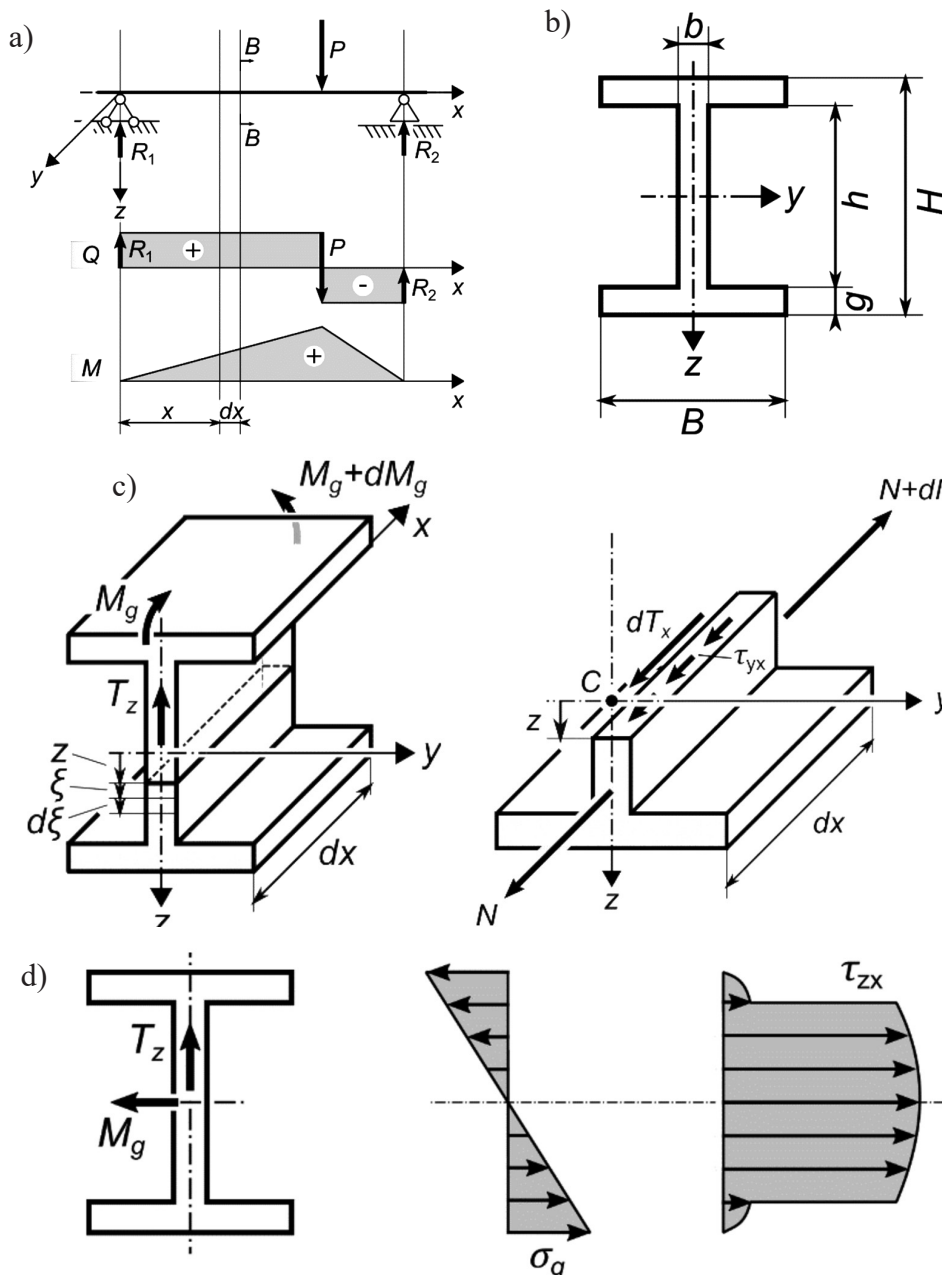
Przy zaprezentowanym na rys. 5.3 układzie współrzędnych naprężenia  $\tau_{zx}$  można obliczać ze wzoru pokazanego powyżej dla prostokąta. Poniżej przedstawiono wzory pozwalające na obliczanie naprężeń  $\tau_{zx}$  w środku dwuteownika, dostosowane do oznaczeń na rys. 5.3 dla przypadku klasycznego (teoretycznego schematu) dwuteownika:

$$\tau_{zx} = \frac{T \cdot S_y(z)}{b \cdot J_y} \quad \text{gdzie} \quad S_y(z) = \iint_{F_1} z \cdot dF \quad (\text{niezależne od zmiennej } y) \quad (5.4)$$

Moment statyczny  $S_y(z) = \iint_{F_1} z \cdot dF$  (niezależny od zmiennej  $y$ ) należy obliczać z uwzględnieniem części przekroju od współrzędnej  $z$  do  $0,5 \cdot H$ , tj. uwzględniając jedną (np. dolną) z półek. Szerokość  $b$  przy obliczeniach naprężeń w środku odpowiada grubości środnika, natomiast w obliczeniach  $\tau_{zx}$  dla półki odpowiada szerokości półki (oznaczonej na rys. 5.3 jako  $B$ ). Z uwagi na znacznie większą szerokość półek od szerokości (grubości) środnika wartości naprężeń  $\tau_{zx}$  w półkach są niewiel-



kie i często w obliczeniach technicznych pomijane. Na rys. 5.3d pokazano rozkład naprężeń stycznych  $\tau_{zx}$  oraz  $\sigma_g$  w dwuteowniku.



Rys. 5.3. Wyznaczanie naprężeń  $\tau_{zx}$  w belce o przekroju dwuteowym: a) schemat statyczny oraz wykresy  $M_g$  i  $T$ , b) schemat metody, c) zasada obliczeń  $\tau_{zx}$  w dwuteowniku, d) rozkłady naprężeń  $\tau_{zx}$  oraz  $\sigma_g$

### 5.3.2. WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ $\tau_{yx}$ W PÓLKACH DWUTEOWNIKA

Duży wymiar szerokości półek dwuteownika sprawia, że konieczne jest działanie naprężeń  $\tau_{yx}$ , które wymuszają zachowanie zgodności odkształceń półek na całej ich szerokości z odkształceniami środka, czyli zachowanie **plaskości przekroju poprzecznego belki**. Dla wyznaczenia tych naprężeń ( $\tau_{yx}$ ) należy rozważyć równowagę, odciętej płaszczyzną równoległą do płaszczyzny  $xz$ , części półki z analizowanego odcinka belki, co pokazano na rys. 5.4b i 5.4c wraz z działającymi siłami. W analizie wytrzymałościowej przyjmuje się założenia, że naprężenia  $\tau_{yx}$  w półce działają równoległe do linii środkowej półki (wypadkowe siły styczne w odległości  $z_0 = 0,5h_0$  od osi  $y$ , gdzie  $h_0 = H - g$ ), a ich wartość po grubości półki jest stała i jest funkcją tylko zmiennej  $y$ .

$$N = \iint_{F_2} \frac{M_g}{J_y} z_0 \cdot dF, \quad N + dN = \iint_{F_2} \frac{M_g + dM_g}{J_y} z_0 \cdot dF, \quad dT_x = \tau_{yx} \cdot g \cdot dx \quad (5.5)$$

Równanie równowagi w postaci sumy współrzędnych sił na osi  $x$  ma postać:

$$N + dN - N - dT = 0 \quad (5.6)$$

po podstawieniu odpowiednich wyrażeń wg wzorów (5.5) i redukcji otrzymuje się zależność:

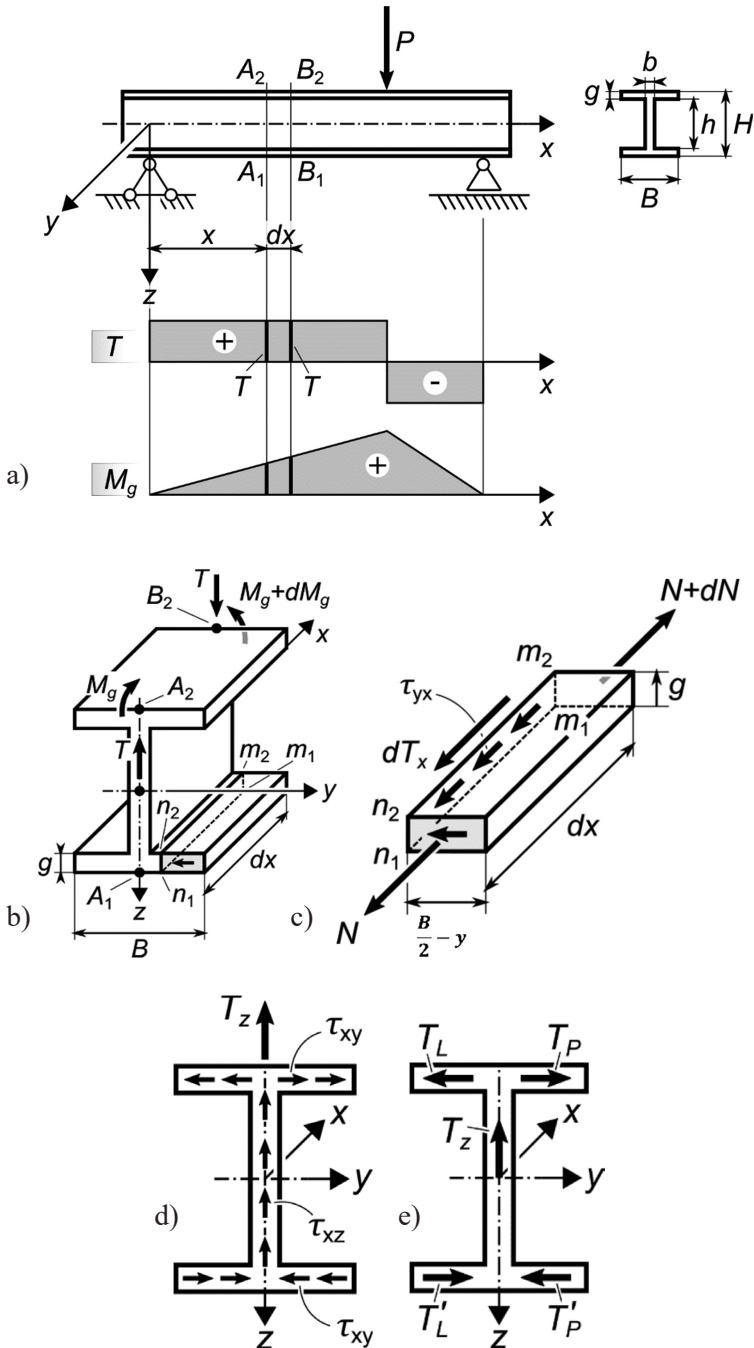
$$dN = dT, \text{ a po podstawieniu: } \iint_{F_2} \frac{dM_g}{J_y} z_0 \cdot dF = \tau_{xy} \cdot g \cdot dx \text{ i dalej:}$$

$$\frac{dM_g}{dx} \cdot \frac{1}{g \cdot J_y} \cdot \iint_{F_2} z_0 \cdot dF = \tau_{xy}; \text{ po wykorzystaniu zależności (5.4) otrzymuje się:}$$

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_y(y)}{g \cdot J_y} \quad (5.7)$$

$S_y(y)$  – moment statyczny pola  $F_2$  (odciętego odcinka półki) względem osi  $y$ .

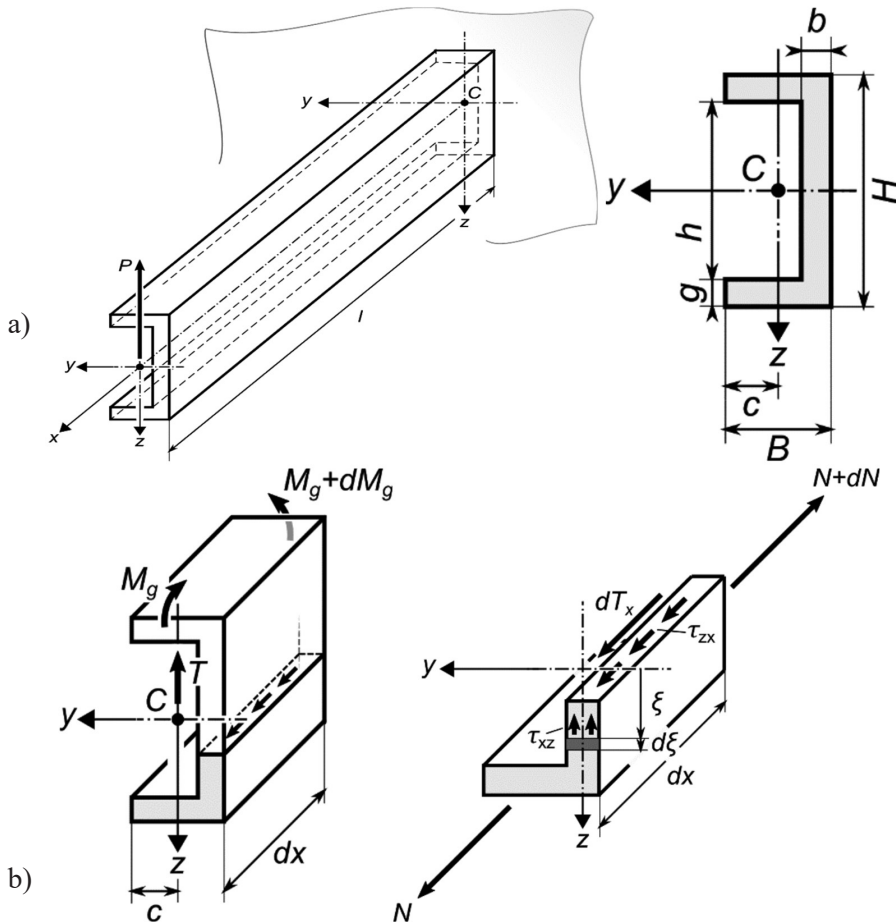
Moment  $S_y(y)$  odciętej części półki względem osi obojętnej  $y$  wzrasta liniowo w miarę zbliżania się do osi symetrii przekroju. Wartość naprężenia  $\tau_{yx}$  w półce wzrasta także liniowo, osiągając ekstremum w linii styku półki ze środkiem. Wobec położenia układu współrzędnych względem przekroju i półek, naprężenia  $\tau_{yx}$  w półkach po obu stronach osi symetrii mają przeciwne znaki i również przeciwne zwroty, co pokazano na rys. 5.4d. Wobec różnych znaków  $\tau_{yx}$  po obu stronach środka ich wartość w osi symetrii wynosi zero. W rezultacie wypadkowe tych naprężeń w półkach po obu stronach środka równoważą się wzajemnie przy momencie równym zero. W przypadku obciążenia belki w płaszczyźnie symetrii nie wystąpią zatem żadne czynniki zaburzające zginanie proste, tj. przemieszczanie się punktów belki w płaszczyznach równoległych do płaszczyzny symetrii. Układ sił stycznych o kierunku  $y$  w półkach dwuteownika pokazano na rys. 5.4e.



Rys. 5.4. Wyznaczanie naprężeń stycznych  $\tau_{yx}$  w półkach dwuteownika: a) schemat statyczny belki, przekrój oraz wykresy  $M_g$  i  $T$ , b) koncepcja odcinania półki przekroju do analizy statycznej, c) schemat statyczny odciętej części półki do równania równowagi, d) zwroty naprężeń  $\tau_{yx}$  w półkach, e) układ sił stycznych w półkach dwuteownika

## 5.4. ZASADY WYZNACZANIA NAPRĘŻEŃ STYCZNYCH W PRZEKROJACH BELEK OBCIĄŻONYCH W PŁASZCZYZNACH GŁÓWNYCH NIEBĘDĄCYCH PŁASZCZYZNAMI SYMETRII

W celu zilustrowania problematyki charakterystycznej dla obciążenia belek siłami poprzecznymi w płaszczyźnie głównej, ale nieprzechodzącymi przez płaszczyznę symetrii, przyjęto belkę utwierdzoną na jednym końcu (rys. 5.5a) o przekroju w kształcie ceownika (rys. 5.5b).



Rys. 5.5. Schemat: a) statyczny belki i rysunek przekroju – ceownika, b) wyznaczania naprężeń stycznych  $\tau_{xz}$  w ścianie ceownika (wymiary:  $H = 60$  [mm],  $B = 40$  [mm],  $b = 4$  [mm],  $g = 4$  [mm])

Zachowanie płaskości przekroju zginanej belki wymaga wystąpienia w ścianie („środku”) naprężeń  $\tau_{xz}$ , natomiast w półkach ceownika muszą działać naprężenia  $\tau_{xy}$ . Obydwa wymienione naprężenia styczne, tj.  $\tau_{xz}$  oraz  $\tau_{yx}$ , można wyznaczać na podstawie zasad zaprezentowanych wcześniej obszernie dla przekroju dwuteowego.

Przyjmując oznaczenia z rys. 5.5b, naprężenia styczne  $\tau_{xz}$  wzdłuż linii równoległej do osi  $y$  w odległości  $\xi$  od osi obojętnej ( $y$ ) w ściance można opisać zależnością:

$$\tau_{xz} = \frac{T \cdot S_y(z)}{b \cdot J_y} = \frac{T}{8 \cdot b \cdot J_y} \left[ B(H^2 - h^2) + b \cdot (h^2 - 4z^2) \right] \quad (5.8)$$

Naprężenia  $\tau_{xy}$  w półkach ceownika można wyznaczyć metodą zademonstrowaną przy wyznaczaniu naprężeń w półkach dwuteownika, co pokazano wcześniej na rys. 5.4.

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_y(y)}{g \cdot J_y} \quad (5.9)$$

gdzie:  $S_y(y)$  – moment statyczny odcinka półki względem osi  $y$ .

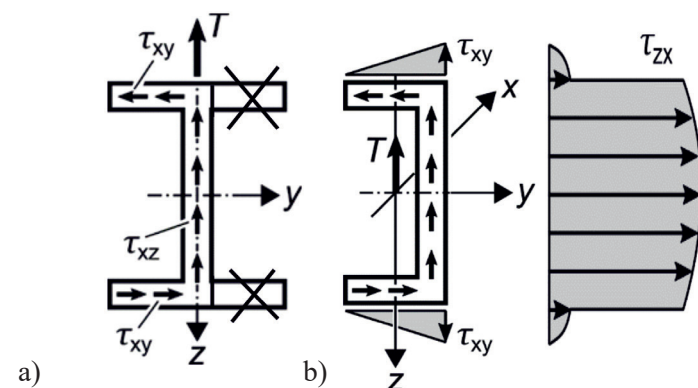
Wartość naprężenia  $\tau_{xy}$  zmienia się liniowo podobnie jak w półce dwuteownika. Maksymalna wartość naprężenia  $\tau_{xy}$  wystąpi w miejscu połączenia półki ze ścianką i wynosi:

$$\tau_{xy\max} = \frac{T}{2J_y} \cdot h_0 \cdot (B - b); \text{ gdzie } h_0 = H - g \quad (5.10)$$

**Uzupełnienie:** Obraz rozkładu naprężeń stycznych  $\tau_{xy}$  w półkach ceownika można także uzyskać na podstawie przybliżonej analizy naprężeń stycznych w półkach dwuteownika. Na rys. 5.6c pokazano dwuteownik, w którym odcięto części półek po prawej stronie środka. Po operacji odcięcia prawych półek dwuteownik przekształcił się formalnie w ceownik, na którym pokazano naprężenia styczne  $\tau_{xy}$  po lewej stronie środka oraz  $\tau_{xz}$  w środku. Jest dosyć oczywiste, że taki układ sił (naprężeń) nie może pozostać w równowadze. Dodatkowo pokazano również rozkłady naprężeń stycznych  $\tau_{xy}$  w półkach oraz rozkład naprężeń stycznych  $\tau_{xz}$  w ściance ceownika. Dalsza szczegółowa analiza sił w elementach ceownika zostanie omówiona poniżej.

Na rys. 5.6 widać zasadniczą różnicę między rozkładami naprężeń  $\tau_{xy}$  w przekrojach symetrycznych, jak np. dwuteownik (rys. 5.4), oraz w przekrojach niesymetrycznych, jak np. ceownik. W dwuteowniku ścianka (środek) leży wzdłuż osi symetrii, zatem naprężenia  $\tau_{xy}$  w półkach spełniają warunek symetrii i ich wypadkowe w półkach są równe zero. W ceowniku naprężenia  $\tau_{xy}$  w półkach mają zwroty przeciwne (rys. 5.6a). Ich wypadkowe tworzą zatem parę sił o momencie  $M_{r1}$ , która będzie wywoływać dodatkowe skręcanie belki. Przykrą niespodzianką dla konstruktora jest fakt, że wspomniany moment  $M_{r1}$  nie wynika z redukcji sił do środków ciężkości przekrojów belki. Jest zatem obciążeniem dodatkowym, które może nie zostać rozpoznane przez mniej doświadczonego obliczeniowca bądź konstruktora. Operacje zmierzające do określenia sposobu eliminacji dodatkowe-

go skręcania, które może być groźne, szczególnie dla przekrojów profilowych, w tym także cienkościennych, omówiono poniżej oraz pokazano szczegółowo na rys. 5.7a, 5.7b oraz 5.7c. Rezultatem tych analiz będzie wyznaczenie położenia płaszczyzny obciążenia, które nie wywoła powstania momentu  $M_{t1}$  powodującego wspomniane skręcanie.



Rys. 5.6. a) Obraz naprężeń stycznych w dwuteowniku po odcięciu jednostronnym półtek;  
 b) Rozkład naprężeń stycznych  $\tau_{zx}$  w ścianie oraz  $\tau_{xy}$  w półkach ceownika

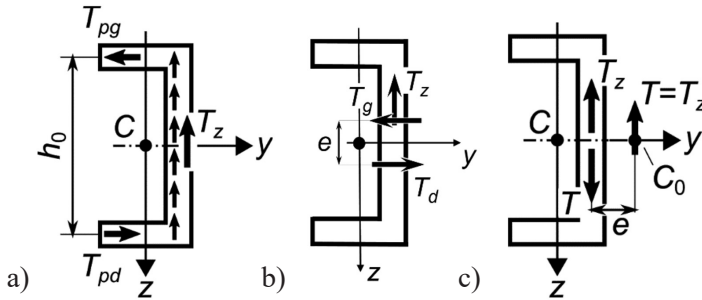
Dodatkowo wypadkowa naprężeń stycznych w ścianie ceownika, której wartość jest przyjmowana jako równa w przybliżeniu  $T$ , działa w istotnej odległości  $y'_c$  od płaszczyzny głównej, czyli od środka ciężkości przekroju  $C$ , a także w odległości  $e$  od punktu  $C_0$ . Ten fakt generuje dodatkowy moment powodujący skręcanie pręta  $M_{t2}$ , którego także nie uzyskuje się w wyniku redukcji sił do środków ciężkości przekrojów pręta.

Do wyznaczenia wartości wspomnianego dodatkowego momentu skręcającego  $M_{t1}$  należy obliczyć wartość wypadkowej naprężeń  $\tau_{xy}$  w każdej z półek ceownika, mianowicie siły wypadkowej  $T_{pg}$  w półce górnej oraz siły  $T_{pd}$  w półce dolnej. Wobec symetrii ceownika względem osi  $y$  wartości wspomnianych sił są równe, natomiast zwroty przeciwne. Siły  $T_{pg}$  oraz  $T_{pd}$  tworzą parę sił o momencie  $M_{t1}$ :

$$|M_{t1}| = T_{pg} \cdot h_0 = T_{pd} \cdot h_0 \quad (5.11)$$

Wartości sił  $T_{pg}$  oraz  $T_{pd}$  łatwo wyznaczyć, korzystając ze znanego już rozkładu (liniowego) naprężeń  $\tau_{xy}$  w półkach ceownika. Po wykonaniu dość prostych rachunków otrzymuje się zależność:

$$T_{pg} = T_{pd} = \frac{T}{4J_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot (H + h) \cdot g \cdot (B - b)^2 \quad (5.12)$$



Rys. 5.7. Ilustracja operacji wyznaczania wartości momentu  $M_{t1}$  oraz współrzędnej środka ścinania  $C_0$

Zakładając lokalizację sił  $T_{py}$  w liniach środków grubości półek, zgodnie z wcześniejszym założeniem, można obliczyć wartość wspomnianego wcześniej dodatkowego momentu skręcającego  $M_{t1}$ :

$$M_{t1} = T_{py} \cdot \frac{1}{2} \cdot (H + h) = \frac{T}{4J_y} \cdot \frac{(H + h)^2}{4} \cdot g \cdot (B - b)^2 \quad (5.13)$$

Po przekształceniach otrzymuje się:

$$M_{t1} = \frac{T}{16J_y} \cdot g \cdot (H + h)^2 \cdot (B - b)^2 \quad (5.14)$$

Końcowym wynikiem prowadzonej analizy będzie wyznaczenie punktu, który zostanie oznaczony  $C_0$  i nazwany „środkiem ścinania” lub „środkiem sztywności”.

**Jest to taki punkt w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, niekoniecznie położony w polu przekroju, że siła, której linia działania przechodzi przez ten punkt, nie powoduje skręcania belki (pręta).**

Stwarza to gwarancję, że w takim przypadku zginanie będzie „zginaniem prostym”.

Operacje prowadzące do wyznaczenia położenia środka ścinania (środka sztywności) pokazano na rys. 5.7a, 5.7b oraz 5.7c. Operacje te wykorzystują „zasadę zesztynienia” oraz znane zasady statyki, a mianowicie: „para sił, obciążając ciało sztywne, jest układem swobodnym w swej płaszczyźnie działania”, oraz zasady dotyczące redukcji układów sił i ich przekształcania w równoważne układy sił o innej postaci. Dotyczy to w szczególności przekształcania pary sił  $(T_{py}, -T_{py})$  w równoważną parę sił o innych wartościach  $(T_z, -T_z)$ , a następnie przemieszczenie tej nowej pary tak, aby siły  $T$  oraz  $-T$  działały wzdłuż jednej prostej, tworząc dwójkę zerową, czyli układ równoważny zero.

W rezultacie tych operacji pozostaje teraz jedna siła o wartości  $T$ , której prosta działania przechodzi przez punkt  $C_0$  nazywany „środkiem ścinania” lub „środkiem sztywności”. Przeprowadzona redukcja układu sił dowiodła, że teraz nie występuje już dodatkowy moment skręcający belkę oznaczony wcześniej jako  $M_{t1}$  wynikający

z działania pary sił ( $T_{pg}$ ,  $T_{pd}$ ). Z warunków równowagi rozpatrywanych układów sił otrzymuje się wzór na wielkość  $e$  definiującą położenie punktu  $C_0$  w stosunku do położenia linii środkowej ścianki ceownika:

$$e = \frac{T_{py}}{T} \cdot (H - g) \quad (5.15)$$

$$e = \frac{g}{4J_y} \cdot (H - g)^2 \cdot (B - b)^2 \quad (5.16)$$

Wzory (5.15) oraz (5.16) określają położenie środka ścinania  $C_0$  względem linii środkowej ścianki ceownika. Odległość środka ścinania  $C_0$  od płaszczyzny głównej, czyli środka ciężkości przekroju  $C$  określona jest zależnością:

$$|CC_0| = y'_c + e = y_c - 0,5b + e \quad (5.17)$$

Poniżej zamieszczono podstawowe wzory dla obliczenia parametrów oraz wartości tych parametrów umożliwiającą określenie położenia punktu  $C_0$  dla przekroju pokazanego na rys. 5.5 oraz wartości momentu  $M_t$ :

$$y_c = \frac{S_l}{F} = \frac{2 \cdot B \cdot g \cdot 0,5B + (H - 2 \cdot g) \cdot b \cdot 0,5 \cdot b}{2 \cdot B \cdot g + (H - 2 \cdot g) \cdot b} = 12,91[\text{mm}] \quad (5.18)$$

$$y'_c = y_c - 0,5 \cdot b = 10,91[\text{mm}] \quad (5.19)$$

$$J_y = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{(B - b) \cdot (B - 2 \cdot g)^3}{12} = 298176[\text{mm}^4] \quad (5.20)$$

$$e = \frac{g}{4 \cdot J_y} \cdot (H - g)^2 \cdot (B - b)^2 = 13,63[\text{mm}] \quad (5.21)$$

$$M_{tc} = (e + y'_c) \cdot P = 2454 [\text{Nmm}] \quad (5.22)$$

$M_{tc}$  – całkowity dodatkowy moment skręcający przekrój pręta wynikający z obciążenia pręta siłą poprzeczną  $P = 100$  [N] przyłożoną w płaszczyźnie głównej ( $x, z$ ).



## 5.5. PRZYKŁADOWE OBLICZENIA NAPRĘŻEŃ WYWOŁANYCH PRZYŁOŻENIEM SIŁY (POPRZECZNEJ) W ŚRODKU CIĘŻKOŚCI ZAMIAST W ŚRODKU ŚCINANIA DLA BELKI O PRZEKROJU W KSZTAŁCIE CEOWNIKA

### 5.5.1. WPROWADZENIE DO PRZYKŁADÓW OBLICZENIOWYCH DEMONSTRUJĄCYCH SKUTKI DZIAŁANIA SIŁ POPRZECZNYCH W PŁASZCZYZNACH NIEBĘDĄCYCH PŁASZCZYZNAMI SYMETRII BELKI

Dla zobrazowania skutków przyłożenia siły poprzecznej w płaszczyźnie głównej belki, niebędącej jej płaszczyzną symetrii, warto wykonać szacunkowe obliczenia naprężeń stycznych oraz przemieszczeń wywołanych dodatkowym skręcaniem momentem równym momentowi siły poprzecznej względem środka ścinania. Obliczenia szacunkowe zostaną wykonane dla belki o kształcie przekroju i ogólnych wymiarach odpowiadających belce przedstawionej na rys. 5.5.

Jak wspomniano wcześniej, dodatkowy moment skręcający belkę równy jest iloczynowi siły poprzecznej i odległości środka ścinania od płaszczyzny głównej będącej płaszczyzną obciążenia, ale nie płaszczyzną symetrii:

$$M_{tc} = (e + y'_c) \cdot T = (e + y'_c) \cdot P \quad (5.23)$$

gdzie:  $T$  – siła poprzeczna w przekroju,  $e$  – odległość punktu  $C_0$  od linii środkowej ścianki ceownika,  $y'_c$  – odległość linii środkowej ścianki od środka ciężkości przekroju.

Metodyka obliczeń przekrojów cienkościennych na skręcanie jest dość złożona i nie będzie tutaj dokładnie prezentowana. Przygotowanie Czytelnika do wykonywania takich obliczeń wymagałoby bardzo obszernego wprowadzenia do nietypowej i trudnej metodyki analizy mechaniki prętów o otwartych przekrojach cienkościennych. Ten obszar wiedzy z zakresu mechaniki konstrukcji jest dość wyraźnie nietypowy i raczej rzadko znajduje miejsce w programach przedmiotu *wytrzymałość materiałów* realizowanych na Wydziałach Mechanicznych bądź Wydziałach Inżynierii Mechanicznej.

Cele, które postawili sobie autorzy rozdziału, to:

- Uściślenie pojęć (definicji) zgięcia prostego w warunkach działania sił poprzecznych.
- Zdefiniowanie pojęcia „środku ścinania” oraz pokazanie przyczyn jego wyznaczenia, a także pokazanie metodyki wyznaczania położenia „środku ścinania” wraz z metodą obliczania momentu skręcającego  $M_t$ .
- Pokazanie skutków, dla wytężenia materiału belki, obciążania belek siłami poprzecznymi w płaszczyznach niebędących płaszczyznami symetrii, w tym również w płaszczyznach tzw. głównych niebędących płaszczyznami symetrii belki.

Zdecydowano zatem o rezygnacji z wykonywania obliczeń metodami analitycznymi, co wymagałoby przedstawienia obszernego i dość trudnego wprowadzenia na rzecz prezentacji wyników charakterystycznych, chociaż prostych przykładów, uży-

skanych **metodą elementów skończonych (MES)**. Aktualnie dostęp do możliwości korzystania z obliczeń elementów konstrukcyjnych metodą elementów skończonych jest dość powszechny zarówno dla studentów, jak i inżynierów.

Autorzy na podstawie własnych doświadczeń w projektowaniu rzeczywistych konstrukcji uważają jednak, że znajomość podstawowych zjawisk występujących w takich niestandardowych przypadkach obciążenia jest przydatna w prowadzeniu obliczeń MES, jak również w procesie oceny uzyskanych wyników, za które odpowiada obliczeniowiec oraz konstruktor. Znajomość podstawowych reguł mechaniki konstrukcji ułatwia również poprawne sformułowanie zadania oraz numerycznego modelu obliczeniowego.

Jako podstawowy model do pokazania wspomnianych wyżej skutków pominięcia „środka sztywności” przyjęto belkę o przekroju w kształcie ceownika, w zasadniczym modelu utwierdzoną na jednym końcu i obciążoną siłą poprzeczną na końcu swobodnym, pokazaną na rys. 5.5. W celu pokazania skutków ominięcia przez płaszczyzną obciążenia środka ścinania obliczenia wykonano dla przypadku obciążenia belki w płaszczyźnie głównej oraz w płaszczyźnie do niej równoległej poprowadzonej przez środek ścinania. Do celów porównawczych oraz oceny wpływu skręcania wykonano również obliczenia tej samej belki obciążonej na swobodnym końcu momentem skręcającym oraz dla przypadku czystego skręcania tej samej belki bez utwierdzenia przekroju końcowego, tj. bez blokady przemieszczeń osiowych przekrojów skrajnych.

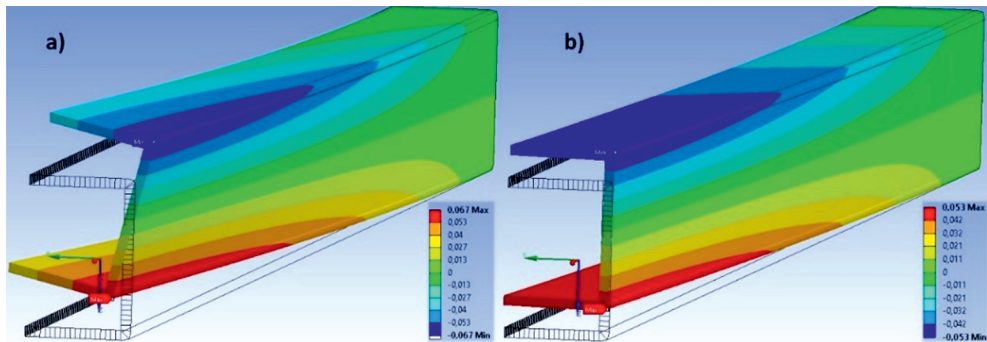
### 5.5.2. OBLICZENIA ODKSZTAŁCEŃ I NAPRĘŻEŃ MODELU WG RYS. 5.5 METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Obliczenia MES wykonano w systemie ANSYS, który uważany jest za jeden z systemów najbardziej sprawnych, zapewniających bogaty wybór elementów oraz równie bogaty zestaw możliwości prezentacji wyników obliczeń. Obliczenia wykonano dla małej wartości siły obciążającej  $P$  równej 100 [N]. Przeprowadzono analizę MES z wykorzystaniem danych otrzymanych z obliczeń analitycznych (wartość „ $e$ ”). Belce przypisano cechy materiału liniowo sprężystego i zdefiniowano jako stal o  $E = 205$  [GPa] i  $\nu = 0,3$ . Obliczenia przeprowadzono z wykorzystaniem czworokątnych elementów powłokowych (QUAD8).

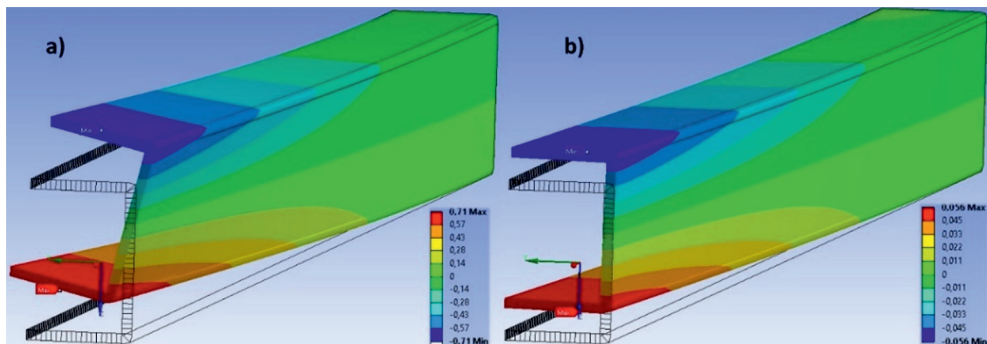
W przypadku elementów bryłowych poddawanych przede wszystkim zginaniu zawsze zaleca się kilka warstw na całej grubości. Elementy bryłowe mają tylko 3 stopnie swobody w swoich węzłach (3 przemieszczenia) w porównaniu do elementów powłokowych, które mają wszystkie 6 stopni swobody w swoich węzłach (3 przemieszczenia i 3 obroty), przez co lepiej sprawdzają się w procesie zginania (są bardziej podatne). Elementy powłokowe spełniają warunki hipotezy prostych normalnych oraz ogólne warunki dotyczące liniowej geometrycznej teorii powłok cienkich, np. także płaski stan naprężenia. Należy pamiętać, że analiza MES jest formą obliczeń przybliżonych, która zależy od dobranych elementów skończonych, funkcji kształtu, siatki, zadanych warunków brzegowych.

Wyniki obliczeń przemieszczeń i naprężeń przedstawiono poniżej w formie kolorowych map. Dla ułatwienia porównań między wynikami dla obu przypadków obciążenia (w płaszczyźnie głównej oraz w płaszczyźnie przechodzącej przez środek ścinania) wyniki obliczeń zestawiono parami dla obu przypadków obciążenia na tle odkształconej konstrukcji przy skali przemieszczeń równej 10:1. Prezentacja wyników na tle odkształconej konstrukcji w bezpośrednim sąsiedztwie dla obu przypadków obciążenia powinna ułatwić Czytelnikowi zauważenie efektów odkształceń skrętnych wymuszanych przez moment skręcający związany z ominięciem przez płaszczyznę obciążenia środka ścinania.

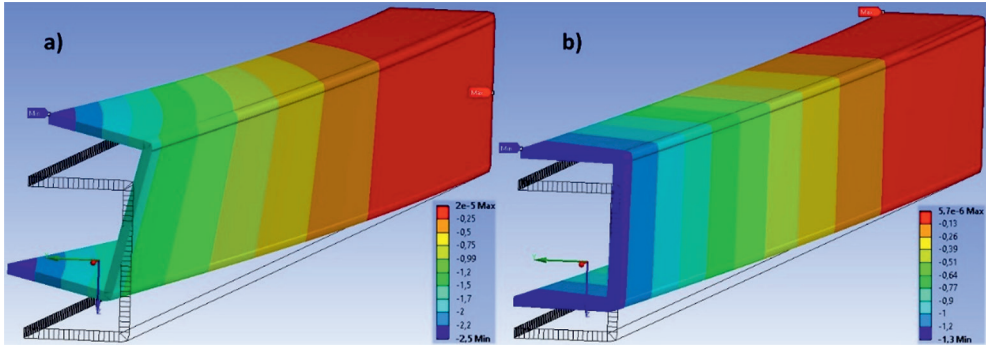
Wyniki obliczeń dla belki o przekroju w postaci ceownika o wymiarach 60x40x4 [mm] przedstawiono na rysunkach od 5.8a i 5.8b do 5.23a i 5.23b. Rysunki oznaczone symbolem literowym „a” dotyczą obciążenia w płaszczyźnie głównej, natomiast oznaczone symbolem literowym „b” dotyczą obciążenia w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny głównej i przechodzącej przez środek ścinania. Poniżej przedstawiono krótki przewodnik po wynikach obliczeń wraz z krótkimi komentarzami dotyczącymi wyników na wybranych rysunkach.



Rys. 5.8. Mapy rozkładów przemieszczeń  $u_x$  [mm] dla obciążenia w płaszczyźnie: a) głównej belki, b) równoległej przechodzącej przez środek ścinania



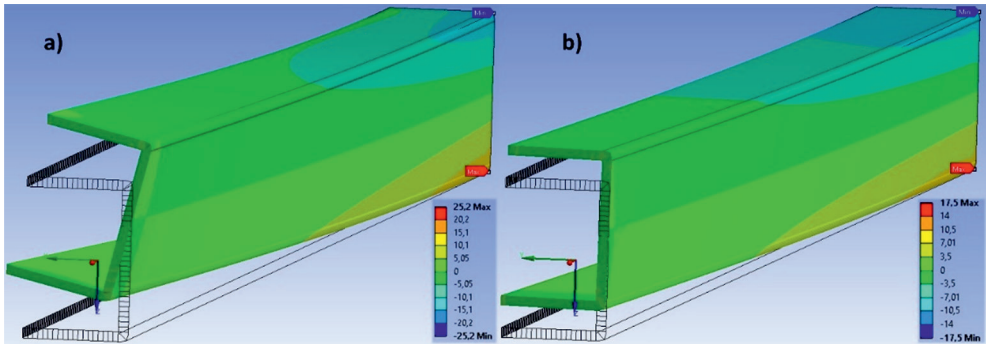
Rys. 5.9. Mapy rozkładów przemieszczeń  $u_y$  [mm] dla obciążenia w płaszczyźnie: a) głównej belki, b) równoległej przechodzącej przez środek ścinania



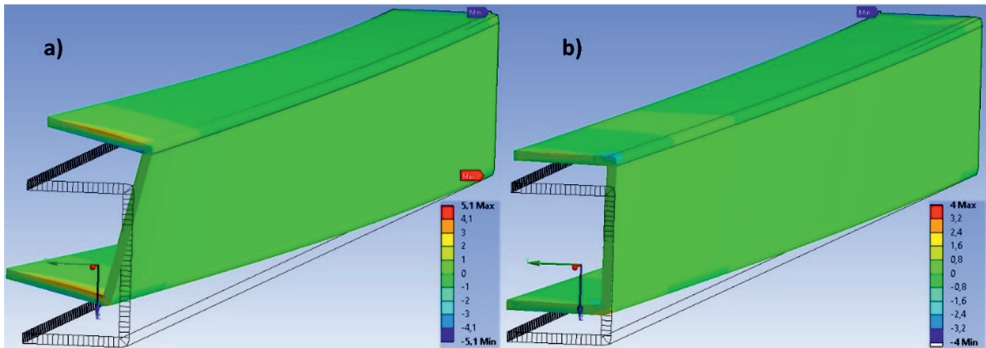
Rys. 5.10. Mapy rozkładów przemieszczeń  $u_z$  [mm] dla obciążenia w płaszczyźnie: a) głównej belki, b) równoległej przechodzącej przez środek ścinania

Rysunki od 5.8a i b do 5.10a i b prezentują przemieszczenia w kierunkach  $x$ ,  $y$  i  $z$  na tle odkształconych konstrukcji. Wartości przemieszczeń  $u_x$  dla obu przypadków obciążenia są bardzo małe (znikome). Przemieszczenia  $u_y$  są nieco większe na rys. 5.9a wskutek efektów związanych z działaniem momentu skręcającego, natomiast na rys. 5.9b są znikome podobnie jak  $u_x$ . Przemieszczenia  $u_z$  na rys. 5.10a i 5.10b są znacząco większe, przy czym wartości dla obciążenia w płaszczyźnie głównej są większe, o czym decydują efekty skrętne – przemieszczenie naroża półki. Na rys. 5.10b widoczny jest klasyczny obraz typowy dla zgięcia prostego, natomiast układ linii granicznych przedziałów na rys. 5.10a wyraźnie wskazuje na skręcanie.

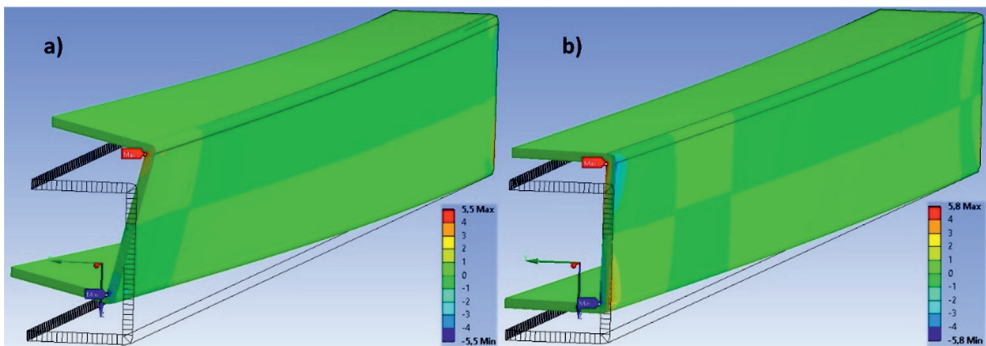
Naprężenia  $\sigma_x$  pokazane na rys. 5.11a i 5.11b osiągają wartości ekstremalne w utwierdzeniu, czego należało oczekiwać. Wartość naprężenia  $\sigma_x$  dla obciążenia w płaszczyźnie przechodzącej przez środek ścinania jest o 30% niższa niż przy obciążeniu w płaszczyźnie głównej. Jeżeli zwrócić uwagę na wartości naprężenia  $\sigma_{x\max}$  na rys. 5.18a, dla skręcanego pręta z utwierdzonym przekrojem, to widać wyraźnie skutki nieswobodnego skręcania i blokady deplanacji przekroju. Naprężenia  $\sigma_{x\max}$  osiągają wartość 13,2 [MPa], co odpowiada prawie połowie  $\sigma_{x\max}$  przy obciążeniu belki w płaszczyźnie głównej (25,2 MPa). W warunkach skręcania swobodnego naprężenie  $\sigma_{x\max}$  osiąga wartość zaledwie 1,2 [MPa]. Naprężenia  $\sigma_y$  oraz  $\sigma_z$  są kilkakrotnie mniejsze od  $\sigma_x$ , przy czym dla obciążenia w płaszczyźnie głównej są o około 20% większe. Ekstremalne naprężenia zredukowane w obu przypadkach obciążenia występują w narożu przekroju utwierdzonego – rys. 5.14a oraz 5.14b. Dla obciążenia w płaszczyźnie głównej są o 44% większe niż przy obciążeniu działającym w płaszczyźnie przechodzącej przez środek ścinania. Naprężenia styczne  $\tau_{xy}$  oraz  $\tau_{xz}$  występują w różnych narożach, nie zawsze pokrywających się z punktami maksymalnego wyciężenia, i przyjmują niezbyt duże wartości.



Rys. 5.11. Mapy rozkładów naprężeń  $\sigma_x$  [MPa] dla obciążenia w płaszczyźnie: a) głównej belki, b) równoległej przechodzącej przez środek ścinania

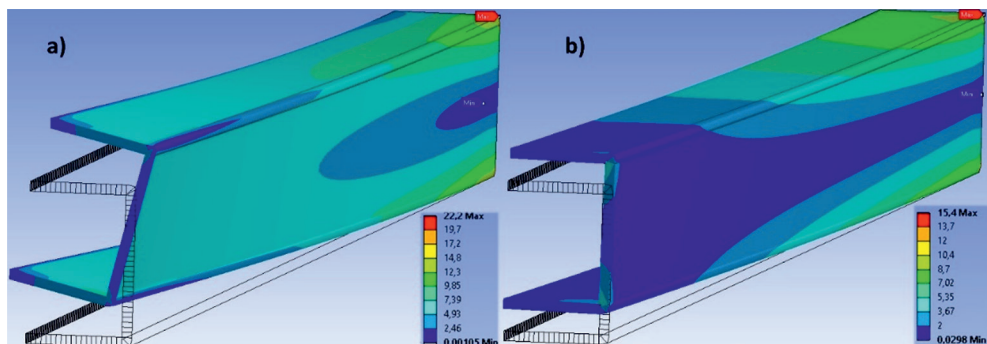


Rys. 5.12. Mapy rozkładów naprężeń  $\sigma_y$  [MPa] dla obciążenia w płaszczyźnie: a) głównej belki, b) równoległej przechodzącej przez środek ścinania

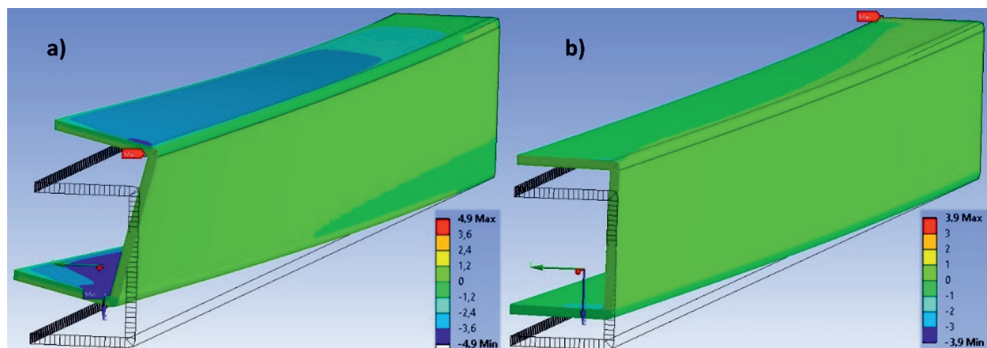


Rys. 5.13. Mapy rozkładów naprężeń  $\sigma_z$  [MPa] dla obciążenia w płaszczyźnie: a) głównej belki, b) równoległej przechodzącej przez środek ścinania

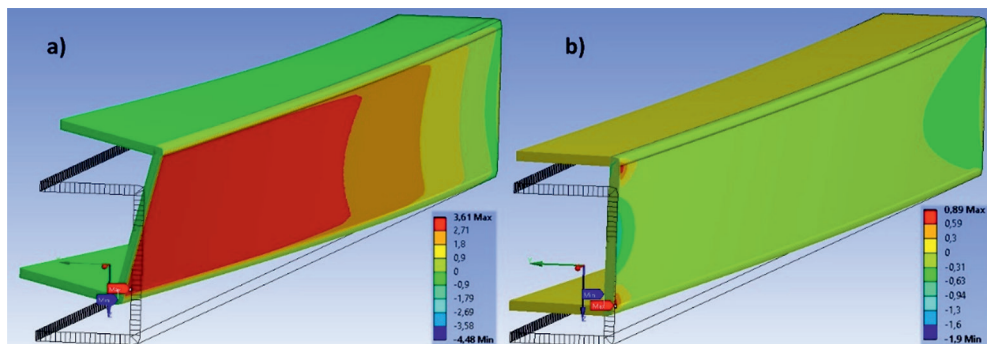




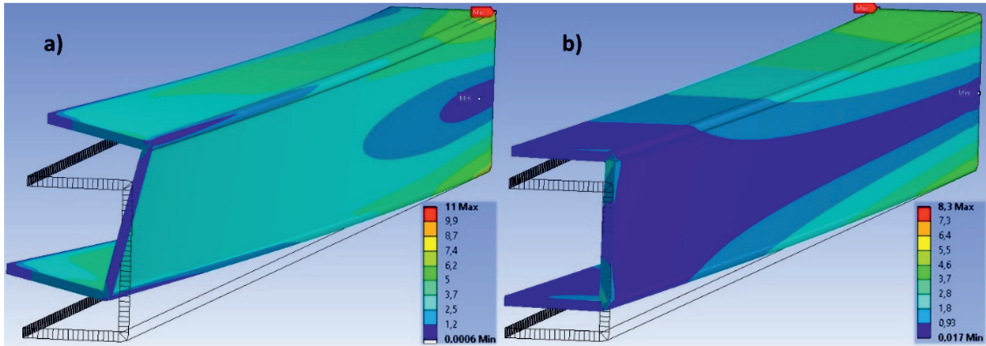
Rys. 5.14. Mapy rozkładów naprężeń zredukowanych według hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego  $\sigma_{HMH}$  [MPa] dla obciążenia w płaszczyźnie: a) głównej belki, b) równoległej przechodzącej przez środek ścinania



Rys. 5.15. Mapy rozkładów naprężeń stycznych  $\tau_{xy}$  [MPa] dla obciążenia w płaszczyźnie: a) głównej belki, b) równoległej przechodzącej przez środek ścinania

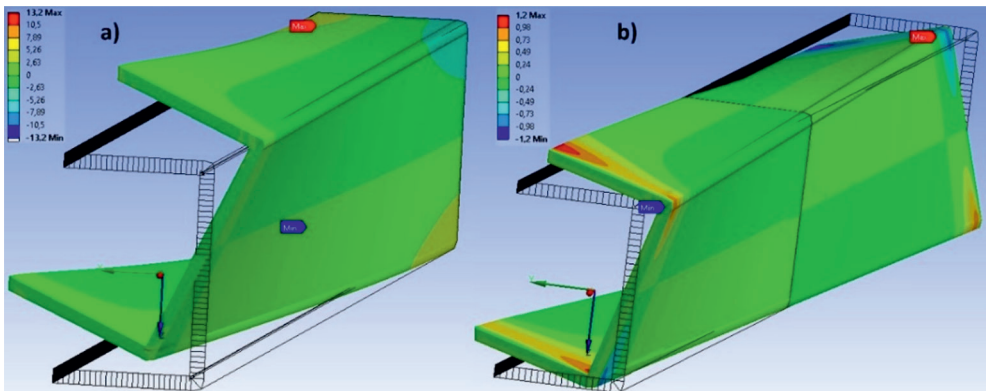


Rys. 5.16. Mapy rozkładów naprężeń stycznych  $\tau_{xz}$  [MPa] dla obciążenia w płaszczyźnie: a) głównej belki, b) równoległej przechodzącej przez środek ścinania



Rys. 5.17. Mapy rozkładów naprężeń stycznych  $\tau_{\max}$  [MPa] dla obciążenia w płaszczyźnie: a) głównej belki, b) równoległej przechodzącej przez środek ścinania

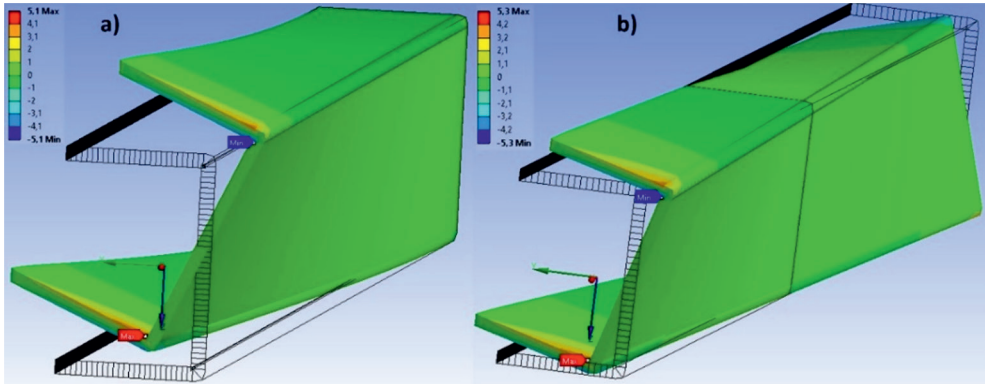
Wartości ekstremalnych naprężeń zredukowanych wg Hubera-Misesa-Hencky'ego, będące wskaźnikami wyężenia materiału, występują w obu przypadkach obciążenia w górnym narożu ścianki ceownika; w przypadku obciążenia w płaszczyźnie przechodzącej przez środek ścinania są o około 30% niższe niż przy obciążeniu w płaszczyźnie głównej.



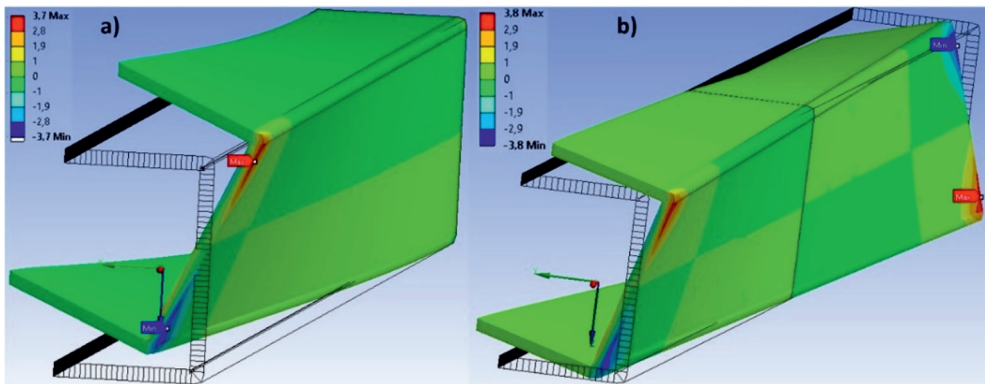
Rys. 5.18. Mapy rozkładów naprężeń  $\sigma_x$  [MPa] przy obciążeniu momentem skręcającym  $M_t$  na swobodnym końcu, drugi koniec belki: a) utwierdzony nieprzesuwnie, b) swobodny, obciążony równoważącym momentem  $M_t$

Pobieżny przegląd wyników zaprezentowanych wyżej obliczeń MES dla przykładowej belki o przekroju ceowym może sugerować duże odstępstwa od wyników klasycznych obliczeń wytrzymałościowych. Podstawowe rozbieżności między tymi wynikami występują w przekroju utwierdzonym i w jego bezpośrednim otoczeniu. Naprężenia normalne poosiowe  $\sigma_{x\max}$  z obliczeń MES są znacząco większe od obliczonych klasycznie bez sięgania do złożonej teorii prętów cienkościennych o otwartych przekrojach poddanych nieswobodnemu skręcaniu. Dokładniejsza analiza pokazanych wyżej wyników obliczeń odkształceń i naprężeń metodą elementów skończonych pozwala na wskazanie i uzasadnienie głównych przyczyn tych rozbieżności.

Dość oczywistą przyczyną znaczącego wzrostu wartości naprężeń i odkształceń jest przyłożenie obciążenia siłą poprzeczną w płaszczyźnie głównej nieprzechodzącej przez środek ścinania – wzrost wartości naprężeń wynosi 30 i więcej procent. To potwierdza celowość podjęcia tematyki tego rozdziału, pokazując konstruktorom prostą ścieżkę do optymalizacji belek poddanych zginaniu poprzecznemu.



Rys. 5.19. Mapy rozkładów naprężeń  $\sigma_x$  [MPa] przy obciążeniu momentem skręcającym  $M_x$  na swobodnym końcu, drugi koniec belki: a) utwierdzony nieprzesuwnie, b) swobodny, obciążony równoważącym momentem  $M_x$ ,

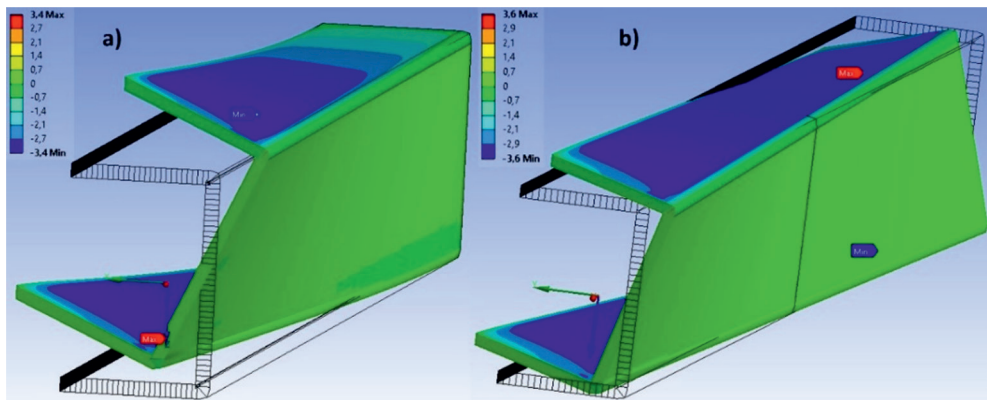


Rys. 5.20. Mapy rozkładów naprężeń  $\sigma_y$  [MPa] przy obciążeniu momentem skręcającym  $M_x$  na swobodnym końcu, drugi koniec belki: a) utwierdzony nieprzesuwnie, b) swobodny, obciążony równoważącym momentem  $M_x$ ,

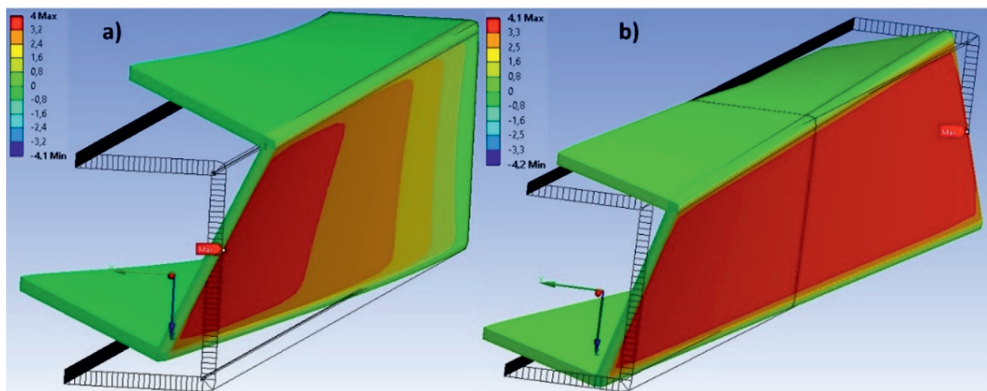
Ważną rolę w analizie wzrostu naprężeń w strefie utwierdzenia spełniają wyniki obliczeń analogicznej belki poddanej czystemu skręcaniu przy zachowaniu utwierdzenia jednego końca oraz innego zadania polegającego na skręcaniu całkowicie swobodnej tej samej belki. W obu przypadkach moment skręcający był równy  $M_x$ , tj. momentowi siły względem środka ścinania. Przy skręcaniu belki o obu swobodnych końcach naprężenie  $\sigma_{x_{max}}$  przyjmuje bardzo małą wartość 1,2 [MPa]. Przy skręcaniu tego samego pręta z utwierdzonym jednym przekrojem końcowym występuje



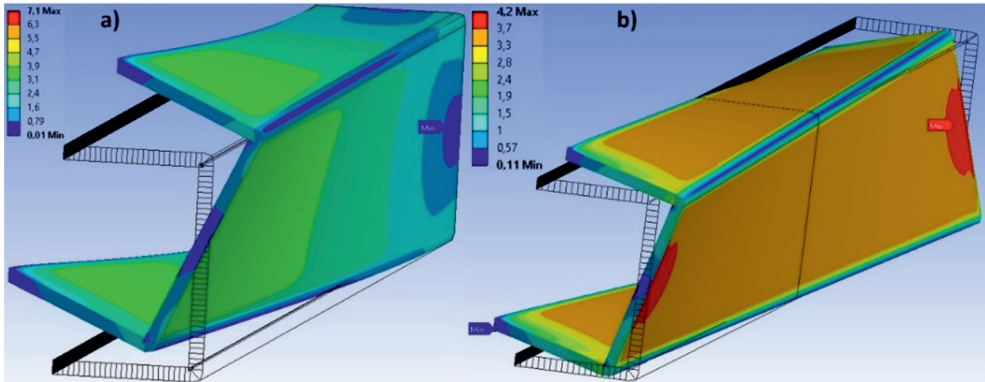
11-krotny wzrost naprężenia i  $\sigma_{x_{\max}} = 13,2$  [MPa]. Ten wzrost naprężeń  $\sigma_x$  stanowi reakcję konstrukcji na blokadę przemieszczeń osiowych, punktów przekrojów poprzecznych będących konsekwencjami nieuniknionej deplanacji przekrojów takich skręcanych prętów. Oczywiście w tych zagadnieniach nie można stosować prostej superpozycji; fakty są takie, że po przyłożeniu obciążenia siłą  $P = 100$  [N] w płaszczyźnie głównej, wywołującej taki sam moment skręcający, naprężenie osiowe w utwierdzeniu osiąga wartość  $\sigma_{x_{\max}} = 25,2$  [MPa]. W przypadku obciążenia taką samą siłą w płaszczyźnie przechodzącej przez środek ścinania (tj. bez udziału skręcania) analogiczne naprężenie osiąga wartość zaledwie  $\sigma_{x_{\max}} = 17,5$  [MPa], to znaczy 69% tamtej wartości.



Rys. 5.21. Mapy rozkładów naprężeń  $\tau_{xy}$  [MPa] przy obciążeniu momentem skręcającym  $M_x$  na swobodnym końcu, drugi koniec belki: a) utwierdzony nieprzesuwnie, b) swobodny, obciążony równoważącym momentem  $M_x$



Rys. 5.22. Mapy rozkładów naprężeń  $\tau_{xz}$  [MPa] przy obciążeniu momentem skręcającym  $M_x$  na swobodnym końcu, drugi koniec belki: a) utwierdzony nieprzesuwnie, b) swobodny, obciążony równoważącym momentem  $M_x$



Rys. 5.23. Mapy rozkładów naprężeń  $\tau_{\max}$  [MPa] przy obciążeniu momentem skręcającym  $M_t$  na swobodnym końcu, drugi koniec belki: a) utwierdzony nieprzesuwnie, b) swobodny, obciążony równoważącym momentem  $M_t$

### 5.5.3. PORÓWNANIE WYNIKÓW MES DLA MODELOWANIA KONSTRUKCJI BELKI ELEMENTAMI BRYŁOWYMI ORAZ PŁYTOWO-POWŁOKOWYMI

Jak wspomniano w p. 5.5.1 oraz 5.5.2, metoda elementów skończonych jest metodą przybliżoną, a dokładność wyników obliczeń, w sensie odwzorowania rzeczywistego stanu odkształcenia i stanu naprężenia, w analizowanej konstrukcji zależy także w pewnym stopniu od sposobu modelowania (dyskretyzacji) oraz wyboru stosowanych typów elementów. Prawidłowe modelowanie i wybór typów elementów stosowanych w różnych strefach konstrukcji zależą głównie od prowadzącego obliczenia i jego zrozumienia analizowanej konstrukcji. System obliczeniowy ANSYS oferuje bardzo obszerny zestaw elementów, co stwarza duże możliwości poprawnego modelowania konstrukcji, chociaż raczej rzadko można z przekonaniem mówić o doborze idealnym. W konstrukcjach złożonych często stosuje się w „modelowaniu” kilka typów elementów w celu lepszego odwzorowania pracy konstrukcji.

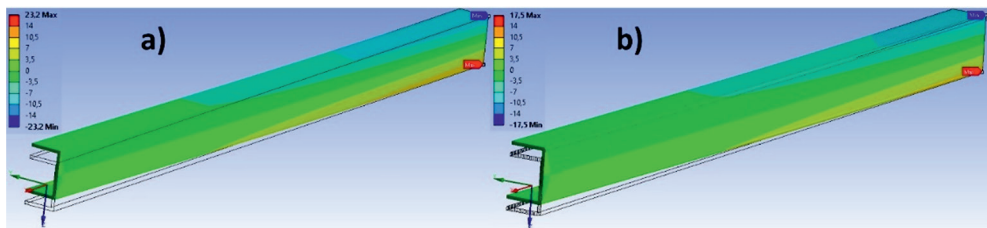
W celu, choćby uproszczonej, prezentacji wpływu typu elementu stosowanego w modelowaniu konstrukcji na wyniki obliczeń MES poniżej przedstawiono obliczenia belki o przekroju w formie ceownika (wg rys. 5.5, analogicznej jak prezentowano w poprzednich obliczeniach), modelowanej dwoma typami elementów, a mianowicie:

- elementami bryłowymi,
- elementami płytowo-powłokowymi.

Szczególnie ciekawe jest porównanie wyników, dla obu typów elementów, w strefie zamocowania (utwierdzenia) belki, gdzie występują ekstrema naprężeń.

Wyniki obliczeń przedstawiono w postaci umożliwiającej łatwe ich porównanie dla obu typów elementów, gdyż modele obliczeniowe różniły się między sobą tylko rodzajem elementów zastosowanych w modelowaniu konstrukcji.

Wyniki obliczeń odnoszą się do obciążeń działających w płaszczyznach przechodzących przez środki ścinania, co eliminuje dodatkowe skręcanie występujące przy obciążeniu działającym w płaszczyźnie głównej. Wymiary przekroju (ceownika) są takie jak stosowane w punkcie 5.5.2. Wyniki obliczeń, w postaci map naprężeń  $\sigma_x$ , dla obu typów elementów zestawiono obok siebie i zaprezentowano na rys. 5.24. Na rys. 5.24a pokazano naprężenia  $\sigma_x$  dla elementów bryłowych, natomiast na rys. 5.24b dla elementów płytowo-powłokowych. Jak pokazano na rys. 5.24, wartości naprężeń  $\sigma_x$  w utwierdzeniu są dla elementów bryłowych 23,2 [MPa], natomiast dla elementów płytowo-powłokowych 17,5 [MPa], czyli o 25% mniejsze. Porównanie dla pozostałych składowych stanu naprężenia zamieszczono poniżej na rys. 5.24 i w Tabeli 5.1.



Rys. 5.24. Mapy rozkładów naprężeń  $\sigma_x$  [MPa] dla modelowania elementami: a) bryłowymi, b) płytowo-powłokowymi

Tabela 5.1

Zestawienie wyników maksymalnych wartości naprężeń [MPa]

		Wyniki dla modelowania elementami:	
		bryłowymi	płytowo-powłokowymi
$\sigma_{x(1,33)}$		23,2	17,5
$\sigma_y$		8,1	4,0
$\sigma_z$		8,1	5,8
$\tau_{xy}$		5,5	3,9
$\tau_{xz}$	Max	3,9	0,89
	Min	-5,1	-1,9

Wyniki obliczeń naprężeń prostopadłych do płaszczyzny zamocowania pręta ( $\sigma_x$ ) dość wyraźnie pokazują różnice wartości ekstremalnych naprężeń obliczonych dla modelu zbudowanego z elementów bryłowych oraz dla modelu zbudowanego z elementów płytowo-powłokowych (w obu przypadkach elementy są podstawowe). Obliczone wartości naprężeń  $\sigma_x$  dla elementów bryłowych są o ponad 30% większe od obliczonych dla modelu złożonego z elementów płytowo-powłokowych. Dokładniejsza analiza obu typów elementów wskazuje, że elementy płytowo-powłokowe

mają możliwość bardziej podatnego związania się z podporą (sztywną zazwyczaj) ze względu na sześć stopni swobody węzłów (trzy obroty i trzy przemieszczenia), wobec trzech stopni swobody elementów bryłowych – tylko trzy przemieszczenia. Oczywiście podobne porównania można wykonywać dla modeli obliczeniowych zbudowanych z różnych elementów. Wyniki dla modeli obliczeniowych zbudowanych z różnych elementów będą zapewne różne. Wskazuje to tylko na niejednoznaczność wyników obliczeń MES w zależności od modelu obliczeniowego.

## 5.6. PODSUMOWANIE

Opracowanie zaprezentowanego powyżej eksperymentu obliczeniowego wraz z obszernym uzasadnieniem zjawisk występujących w belkach obciążonych siłami poprzecznymi działającymi w płaszczyznach głównych, ale niebędących płaszczyznami symetrii podyktowane jest przekonaniem, że ten problem traktowany jest w podręcznikach zbyt marginalnie. W większości polskich podręczników do *wytrzymałości materiałów* występuje definicja zginania prostego jako przypadku, gdy siły działają w płaszczyźnie głównej belki, która w przypadku występowania sił poprzecznych jest nieprawidłowa. Wyjaśnienie tej nieścisłości pojawia się zazwyczaj kilka lub nawet kilkanaście paragrafów dalej i w wielu przypadkach nie jest objęte programem. Stosowanie takiej definicji zginania prostego może, w wielu konstrukcjach, prowadzić do błędów obliczeniowych wyraźnie na niekorzyść pewności. Wobec tendencji optymalizacji masy elementów konstrukcji pamiętać o znaczeniu „środka ścinania” i wpływie jego pominięcia w analizie wytrzymałościowej na bezpieczeństwo konstrukcji jest ważnym elementem wiedzy konstruktora.

Można tu bowiem mówić o pewnym nietypowym schemacie zniszczenia konstrukcji, którego pominięcie może stwarzać duże zagrożenie. Pokazany przykład obliczeniowy został dobrany tak, aby pokazać niebezpieczeństwa towarzyszące pominięciu w analizie obliczeniowej możliwego wpływu środka ścinania.

Wydaje się celowe rozważenie wprowadzenia definicji zginania prostego dla przypadku zginania z udziałem sił poprzecznych, np. analogicznie do prezentowanego w pracy [6].

**Zginanie poprzeczne jest proste wówczas, jeżeli belka posiada płaszczyznę symetrii, a płaszczyzna obciążenia pokrywa się z płaszczyzną symetrii belki.**

Jeżeli rozpatrywany przypadek nie spełnia przytoczonej wyżej definicji zgięcia prostego, konieczna jest analiza z wyznaczeniem środka ścinania oraz uwzględnienie ewentualnych efektów dodatkowego skręcania belki momentem skręcającym równym momentowi siły poprzecznej względem środka ścinania, a także z wykorzystaniem teorii przekrojów cienkościennych, która jest dość specyficzna i nie będzie w tej książce omawiana.

## LITERATURA

- [1] Brzoska Z., Wytrzymałość materiałów, PWN, Warszawa 1979.
- [2] Dietrich M. (red.), Podstawy konstrukcji maszyn, praca zbiorowa. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, wyd. drugie, Warszawa 1995.
- [3] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., Wytrzymałość materiałów. Wyd. Nauk. Techn., Warszawa 1997.
- [4] Pisarenko G.S. (red.), Soprotiwlenije materialow, Kijów 1973.
- [5] Rusiński E., Czmochowski J., Smolnicki T., Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych, Politechnika Wrocławska, Wrocław 2000.
- [6] Timoshenko S.P., Strength of materials, Part II, D. Van Nostrand, INC. Princeton, New Jersey. Ros. Soprotiwlenije Materialow, Izdatielstwo Nauka, Moskwa 1965.
- [7] Walczak J., Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. Tom II. PWN, Warszawa–Kraków 1973.
- [8] Wolmir A.S., Ustojcziwost dieformirujemych sistiem. Izd. Nauka, Moskwa 1967.

## ROZDZIAŁ 6

# WYBRANE PROBLEMY ANALIZY PRZYPADKÓW WYTRZYMAŁOŚCI ZŁOŻONEJ PRĘTÓW

Stefan BUĆKO, Agnieszka CHOJNACKA-BROŻEK

### 6.1. WPROWADZENIE

Proste stany naprężenia, będące skutkami tzw. podstawowych przypadków wytrzymałościowych (rozciąganie, ściskanie, ścinanie, skręcanie i zginanie), w elementach rzeczywistych konstrukcji mechanicznych występują niezbyt często. Sformułowanie warunków bezpiecznej eksploatacji dla tych przypadków nie stwarza większych trudności. Dla każdego z tych prostych przypadków wytrzymałościowych i jednoparametrowych stanów naprężenia wykonuje się badania materiałów konstrukcyjnych ustalające wartości naprężeń krytycznych, np. statyczna próba rozciągania, statyczna próba zginania, statyczna próba skręcania itp. Przez naprężenie krytyczne rozumie się albo granicę plastyczności, tj. naprężenie generujące pierwsze odkształcenia plastyczne (trwałe), albo granicę wytrzymałości dla materiałów kruchych (niewykazujących odkształceń plastycznych).

W sytuacjach równoczesnego działania kilku składowych sił wewnętrznych mówimy o przypadkach wytrzymałości złożonej, np.:

- zginanie z rozciąganiem lub ściskaniem,
- zginanie ze ścinaniem,
- zginanie ze skręcaniem,
- zginanie ze skręcaniem i rozciąganiem

oraz innych układów składowych sił wewnętrznych. Określenie wartości obciążeń bezpiecznych jest już w tych przypadkach problemem wielokrotnie trudniejszym. Występuje wówczas kilka składowych stanu naprężenia, przy czym materiały konstrukcyjne wykazują różną odporność na działanie naprężeń normalnych i naprężeń stycznych, a dodatkowo występuje wpływ gradientu naprężeń na odporność materiału na wystąpienie odkształceń plastycznych. Wobec różnorodności działających naprężeń o zróżnicowanych wartościach, sformułowanie poprawnego warunku bezpieczeństwa konstrukcji na podstawie wyników badań doświadczalnych jest, dla realnych stanów naprężenia, często niemożliwe. Sformułowanie pewnego warunku bezpieczeństwa wymaga kontrolowanej realizacji wielu stanów naprężenia w warunkach laboratoryjnych, co jest bardzo trudne lub wręcz niemożliwe.

Autorzy założyli sobie realizację kilku głównych zadań, a mianowicie:

- Przegląd ważniejszych hipotez wyężeniowych stosowanych w analizie bezpieczeństwa w złożonych stanach napężenia.
- Prezentację klasycznych metod analiz i obliczeń wytrzymałościowych z wykorzystaniem rezultatów teorii sprężystości dla różnych przekrojów prętów.
- Prezentację oraz analizę wyników obliczeń wykonywanych Metodą Elementów Skończonych z oceną dokładności oraz porównanie z wynikami obliczeń klasycznymi metodami wytrzymałości materiałów.
- Zwrócenie uwagi Czytelników na przypadki konstrukcji, kiedy uzasadnione jest rozpatrywanie dwóch różnych kryteriów bezpieczeństwa, gdzie drugi warunek jest warunkiem stateczności konstrukcji.
- W części końcowej rozdziału przedstawiono schemat przykładowego programu badań doświadczalnych umożliwiający porównanie wyników obliczeń z wynikami eksperymentu.

## 6.2. KONCEPCJA WARUNKU BEZPIECZEŃSTWA DLA PRZYPADKÓW WYTRZYMAŁOŚCI ZŁOŻONEJ

### 6.2.1. POJĘCIE WYĘŻENIA MATERIAŁU

W analizie bezpieczeństwa realnych konstrukcji przyjęto posługiwanie się pojęciem „**wyężenia materiału** –  $W$ ”, rozumianym jako stopień zbliżenia stanu fizycznego materiału w „punkcie” do stanu krytycznego. Przez stan krytyczny rozumie się wystąpienie pierwszych odkształceń plastycznych bądź utratę spójności materiału, czemu odpowiada wartość wyężenia równa jedności. W konstrukcjach bezpiecznych wyężenie materiału, we wszystkich punktach elementów konstrukcyjnych, musi być mniejsze od jedności ( $W < 1$ ).

W celu ustalenia wartości  $W$  poszukuje się na drodze analityczno-doświadczalnej pewnej wielkości będącej funkcją naprężeń i odkształceń, która może być uznana za miernik wyężenia materiału. W zależności od kształtu tej funkcji mówi się o hipotezach wyężeniowych:

- naprężeniowych, gdy funkcja wyężenia jest zależna od naprężeń,
- odkształceniowych, gdy funkcja wyężenia jest zależna od odkształceń,
- energetycznych, gdy funkcja wyężenia jest związana z energią odkształcenia sprężystego,
- mieszanych, gdy funkcja wyężenia jest związana z różnymi parametrami stanu naprężenia oraz stanu odkształcenia,
- hipotez probabilistycznych wykorzystujących rachunek prawdopodobieństwa do oceny bezpieczeństwa konstrukcji.

Przydatność „hipotez wyężeniowych” do oceny bezpieczeństwa konstrukcji, czyli do poprawnej oceny wyężenia materiału, jest weryfikowana doświadczalnie



oraz na podstawie obserwacji eksploatacji rzeczywistych konstrukcji i analiz poawaryjnych. W literaturze można spotkać wiele koncepcji „hipotez wyężeńiowych”, przy czym wiele z nich nie znalazło potwierdzenia w badaniach i praktyce konstrukcyjnej, w związku z czym nie są stosowane lub stosowane są bardzo wyjątkowo. Poniżej przedstawiono krótkie omówienia hipotez wyężeńiowych najczęściej stosowanych w projektowaniu konstrukcji.

Jednym z niezwykle wygodnych narzędzi w analizie wyężenia, a zatem i bezpieczeństwa konstrukcji, jest tzw. „naprężenie zredukowane” lub „naprężenie zastępcze”.

**Naprężenie zredukowane  $\sigma_{zr}$  jest to taka wartość naprężenia, która w jednoosiowym rozciąganiu powoduje wyężenie materiału o takiej samej wartości jak analizowany złożony stan naprężenia.**

Wyężenie materiału wyznaczane jest przez określenie wartości funkcji będącej miernikiem wyężenia materiału według stosowanej hipotezy wyężeńiowej i jej porównanie z wartością krytyczną.

Poziom bezpieczeństwa elementu konstrukcyjnego (konstrukcji) wyznacza stosunek naprężenia uznanego przez konstruktora za naprężenie krytyczne  $K_r$  oraz naprężenia zredukowanego. Naprężenie krytyczne przyjmowane jest zazwyczaj jako granica plastyczności wyraźna  $R_e$  lub umowna, obecnie oznaczana jako np.  $R_{p0,2}$  dla materiałów tzw. ciągliwych, oraz jako wytrzymałość doraźna, np.  $R_m$  dla materiałów kruchych. W trybie normalnego projektowania konieczne jest wprowadzenie współczynnika bezpieczeństwa, np.  $X$ . Uogólniony, umowny warunek bezpieczeństwa można również zapisać, wykorzystując pojęcie wyężenia materiału w postaci pokazanej poniżej (6.1):

$$W = \frac{\sigma_{zr}}{K_r} = \frac{1}{X} \leq 1 \quad (6.1)$$

### 6.2.2. WAŻNIEJSZE HIPOTEZY WYĘŻENIOWE

Jak wspomniano wcześniej, opracowano wiele hipotez wyężeńiowych, przy czym wiele z nich nie znalazło potwierdzenia w wynikach badań naukowych, analiz poawaryjnych oraz obserwacji eksploatacyjnych maszyn i konstrukcji. Obszerne omówienie całego wachlarza hipotez wyężeńiowych można znaleźć w podręcznikach wytrzymałości materiałów. Poniżej przedstawiono skrótowe omówienie kilku, najczęściej stosowanych w praktyce projektowej, hipotez wyężeńiowych z zasadami odpowiadającymi standardowym obliczeniom wytrzymałościowym wraz z przykładowymi wzorami na obliczanie naprężeń zredukowanych.



### 6.2.2.1. Hipoteza maksymalnego naprężenia stycznego – Coulomba-Tresca-Guesta – $[\tau_{\max}]$

**„O wyciężeniu materiału w punkcie decyduje wartość maksymalnego naprężenia stycznego”.**

W przestrzennym dowolnym stanie naprężenia można wyróżnić trzy naprężenia główne:

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 ;$$

po uszeregowaniu oznaczane jako:  $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ , gdy  $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III}$  (6.2)

Maksymalne naprężenie styczne określone jest zależnością:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot (\sigma_I - \sigma_{III}) \quad (6.3)$$

Maksymalne naprężenie styczne w jednoosiowym rozciąganiu naprężeniem  $\sigma_{zr}$  wynosi:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{zr} \quad (6.4)$$

Zatem:

$$\sigma_{zr} = \sigma_I - \sigma_{III} \quad (6.5)$$

Przeprowadzone badania wykazały przydatność hipotezy  $[\tau_{\max}]$  do oceny wyciężenia oraz bezpieczeństwa elementów z materiałów wykazujących zdolność do odkształceń plastycznych. Naprężeniem krytycznym jest zatem granica plastyczności wyraźna lub umowna, a w ostatnio opracowanych normach naprężenie inicjujące odkształcenia plastyczne o umownej wielkości.

Wobec zakładanej dla takich materiałów równej odporności na działanie rozciągania oraz ściskania można zapisać warunek:

$$K_c = K_r = K, \text{ gdzie } K \text{ oznacza } R_e \text{ lub } R_{0,2} \quad (6.6)$$

Efektywne sformułowanie warunku bezpieczeństwa wymaga oczywiście wyznaczenia naprężeń głównych.

### 6.2.2.2. Hipoteza ekstremalnego odkształcenia wzdłużnego, tzw. hipoteza de Saint-Venanta – Grashofa, znana również jako hipoteza $[\varepsilon_{\text{extr}}]$

„O wyężeniu materiału decyduje ekstremalna wartość wydłużenia względnego  $\varepsilon_{\text{max}}$  lub  $|\varepsilon_{\text{min}}|$ ”

$$\max \left[ \frac{1}{E} (\sigma_I - \nu \cdot (\sigma_{II} + \sigma_{III})); -\frac{1}{E \cdot z} (\sigma_{III} - \nu \cdot (\sigma_I + \sigma_{II})) \right] \quad (6.7)$$

Zatem napężenie zredukowane określone jest zależnością:

$$\sigma_{zr} = \max \left[ \frac{1}{E} (\sigma_I - \nu \cdot (\sigma_{II} + \sigma_{III})); -\frac{1}{E \cdot z} (\sigma_{III} - \nu \cdot (\sigma_I + \sigma_{II})) \right] \quad (6.8)$$

gdzie  $z = \frac{K_c}{K_r}$ .

Hipoteza ekstremalnego odkształcenia wzdłużnego znajduje zastosowania przy ocenie bezpieczeństwa elementów z materiałów kruchych, dla których  $K_c > K_r$ , zatem  $z > 1$ .

### 6.2.2.3. Hipoteza Hubera-Misesa-Hencky'ego – energii sprężystej odkształcenia postaciowego

Hipoteza Hubera-Misesa-Hencky'ego należy do grupy tzw. hipotez energetycznych, które za miarę wyężenia materiału przyjmują wartość energii odkształcenia sprężystego. Według rozważanej hipotezy **za miarę wyężenia materiału uważa się wartość energii właściwej sprężystego odkształcenia postaciowego w rozważanym punkcie ciała**. Pierwszy koncepcję tej hipotezy sformułował M.T. Huber (profesor Politechniki Lwowskiej) w Czasopiśmie Technicznym w roku 1904. W latach późniejszych analogiczne koncepcje oceny wyężenia materiału sformułowali Mises (1908) oraz Hencky (1923). Merytoryczną podstawą koncepcji oceny wyężenia sformułowaną przez Hubera były wyniki badań materiałów posiadających zdolność do odkształceń plastycznych, w stanach hydrostatycznych (wszechstronne ściskanie) niewykazujących (wówczas) odkształceń plastycznych. Cechą szczególną stanów hydrostatycznych jest występowanie tylko odkształceń objętościowych, a zatem występowanie tylko energii odkształcenia objętościowego, co wskazywało na brak wpływu tej części energii sprężystej na inicjację i występowanie odkształceń plastycznych.

Z warunku równości sprężystej energii odkształcenia postaciowego w dowolnym stanie napężenia oraz w stanie jednoosiowego rozciągania napężeniem zredukowanym  $\sigma_{zr}$  wynika:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (6.9)$$

lub dla układu kierunków głównych:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (6.10)$$

W przypadku wyłączenia w stanie krytycznym:

$$K_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (6.11)$$

Przyjęte kryterium miary wyłączenia materiału w postaci energii sprężystej odkształcenia postaciowego wskazuje na możliwość stosowania dla materiałów tzw. ciągliwych, tj. wykazujących zdolność do odkształceń plastycznych. Jest to jedna z najczęściej stosowanych hipotez wyłączeniowych w inżynierskich pracach projektowych oraz w badaniach o charakterze wyraźnie naukowym.

#### 6.2.2.4. Hipoteza Burzyńskiego

Ideą koncepcji wprowadzenia miernika wyłączenia materiału, sformułowaną przez Włodzimierza Burzyńskiego (współpracownika M.T. Hubera; po wojnie profesora Politechniki Śląskiej), było uwzględnienie czynników wpływających na niszczenie materiałów kruchych, tj. takich, że  $K_c \gg K_r$ , niewykazujących przed dekohezją odkształceń plastycznych. Rozwój technologii produkcji materiałów konstrukcyjnych sprawia, że liczba materiałów „klasycznie kruchych” w szybkim tempie maleje (np. zastępowanie żeliwa szarego żelami sferoidalnymi zdolnymi do odkształceń trwałych), jednak materiały kruche ciągle stosowane są w różnych konstrukcjach.

Zaproponowane przez Burzyńskiego kryterium pomiaru (oceny, oszacowania) wyłączenia materiału uwzględnia całkowitą energię odkształcenia postaciowego oraz pewną część energii odkształcenia objętościowego, która zależy od stanu naprężenia i stałych materiałowych.

Funkcja oceniająca poziom wyłączenia materiału ma wg tej hipotezy postać:

$$F_W = \Phi_f + \eta \cdot \Phi_V \quad (6.12)$$

gdzie:

$\Phi_f$  – energia odkształcenia postaciowego;

$\Phi_V$  – energia odkształcenia objętościowego;

$1 \geq \eta \geq 0$  – współczynnik dobierany dla stanu naprężenia oraz właściwości materiału.

Konstruowanie tej funkcji (miernika wyłączenia) metodami klasycznymi jest dość uciążliwe. Opracowano zatem przybliżoną metodę wyznaczania naprężenia zredukowanego wg koncepcji Burzyńskiego na drodze aproksymacji parabolicznej wykresów. Ogólny wzór pozwalający na obliczanie wartości naprężenia zredukowanego przedstawiono, wygodną w zastosowaniach, zależnością (6.13) bazującą na aproksymacji parabolicznej omawianej hipotezy:

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{2\kappa} \left\{ (1-\kappa)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sqrt{(\kappa-1)^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 4\kappa \left[ \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_x \right] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \right\} \quad (6.13)$$

gdzie  $\kappa = \frac{K_c}{K_y}$ .

W literaturze spotyka się jeszcze wiele innych koncepcji pomiaru (oszacowania) wytrzymałości materiału w punkcie, jednak ich zastosowania są bardziej specjalistyczne i w prezentowanym opracowaniu zostały pominięte.

### 6.3. WYZNACZANIE NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ DLA PRZYPADKU ZGINANIA ZE SKRĘCANIEM

Spośród wielu tzw. „przypadków wytrzymałości złożonej” w konstrukcjach mechanicznych często występuje zginanie ze skręcaniem prętów o przekrojach kołowo-symetrycznych. W niektórych konstrukcjach mechanicznych można również spotkać pręty o przekrojach niespełniających warunków kołowej symetrii (często cienkościenne zamknięte), poddane zginaniu ze skręcaniem. Analiza wytrzymałościowa prętów o przekrojach niespełniających warunków kołowej symetrii i poddanych równoczesnemu działaniu momentów zginającego oraz skręcającego, a często również sił poprzecznych, jest bardziej skomplikowana i wyraźnie bardziej pracochłonna. Przedstawiane w dalszych częściach tego rozdziału analizy nie obejmują przypadków, kiedy moment skręcający pojawia się jako skutek obciążenia pręta w płaszczyźnie nieprzechodzącej przez środek ścinania. Ten ostatni przypadek jest tematem oddzielnego rozdziału.

#### 6.3.1. ZGINANIE ZE SKRĘCANIEM PRĘTÓW O PRZEKROJACH KOŁOWO-SYMETRYCZNYCH

Pręty proste o przekrojach kołowo-symetrycznych, poddane działaniu momentu skręcającego oraz sił poprzecznych generujących momenty zginające oraz rzadziej siły normalne, posiadają cechy bardzo wygodne przy analizie odkształceń i naprężeń. Zginanie pręta o przekroju kołowo-symetrycznym, tj. w kształcie koła lub pierścienia kołowego, jest zawsze „zgięciem prostym”, siły poprzeczne generują naprężenia styczne osiągające ekstrema w punktach na osi obojętnej zginania, składowe normalne  $N_x$  generują naprężenia normalne poosiowe rozłożone równomiernie w przekroju, natomiast naprężenia styczne od skręcania osiągają ekstremum na powierzchni zewnętrznej pręta – rys. 6.1. Warto również pamiętać, że w przypadku działania sił obciążających w różnych płaszczyznach osiowych zawsze możliwe jest sprowadzenie (redukcja) sił do prostopadłych do siebie składowych, prostopadłych lub równoległych do osi pręta. Po wyznaczeniu sił składowych należy obli-

czyć momenty zginające (np.  $Mg_y$  oraz  $Mg_z$ ); następnie obliczyć sumy geometryczne momentów składowych ( $Mg_y$  i  $Mg_z$ ), korzystając z faktu, że wszystkie płaszczyzny przechodzące przez oś pręta kołowego są równoprawnymi płaszczyznami symetrii tego pręta. Formalnie możliwe jest i bywa stosowane w praktyce inżynierskiej rozpatrywanie zginania w różnych płaszczyznach dla pewnych odcinków pręta.

W przypadku przekroju pierścieniowego można oczekiwać wystąpienia naprężeń stycznych od sił poprzecznych  $\tau_r$ , które po jednej stronie płaszczyzny zginania będą sumować się z naprężeniami ekstremalnymi od skręcania  $\tau_s$ , przy czym w tym punkcie położonym na osi obojętnej zginania naprężenie  $\sigma_g = 0$ . W przypadku przekroju kołowego można oczekiwać, że naprężenia styczne od ścinania będą mieć niewielkie znaczenie dla wyężenia materiału pręta i mogą być pomijane.

**Uwaga:** projektując przekrój pierścieniowy, należy pamiętać, że przy zbyt cienkiej ściance może wystąpić inny, niż oczekiwany, schemat zniszczenia, mianowicie w postaci lokalnej utraty stateczności ścianki, zmniejszając istotnie nośność pręta. Funkcjonuje bowiem przekonanie, na ogół prawdziwe, że projektowanie cienkościennych przekrojów poprawia stosunek sztywności do masy pręta. Przekonanie to pomija jednak możliwość wystąpienia innego, niż powszechnie rozpatrywany, schematu zniszczenia (tzn. wystąpienia lokalnej utraty stateczności ścianki pręta) i jest zasadne tylko do pewnej granicznej wartości stosunku grubości ścianki do średnicy przekroju.

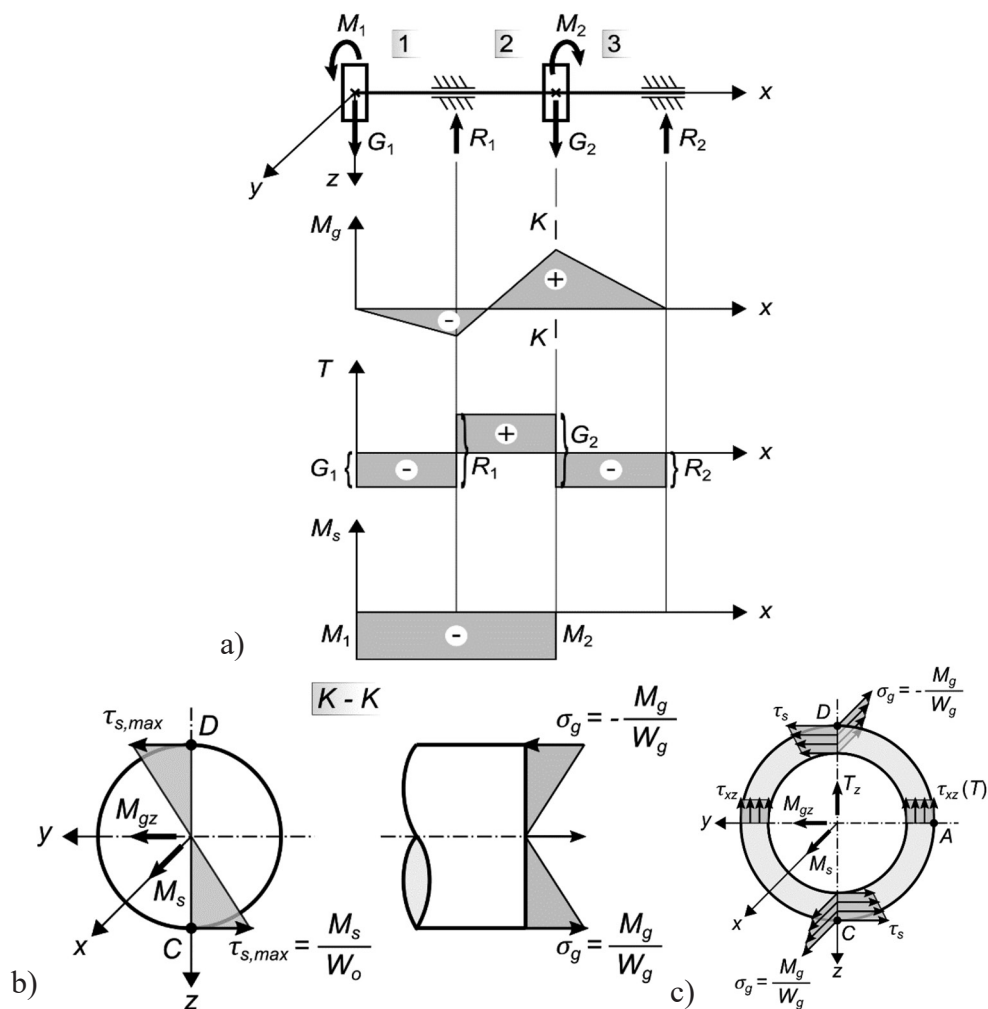
Krytyczną wartość momentu skręcającego dla cienkościennej rury (pręta o przekroju pierścieniowym) o dużej długości można oszacować np. z zależności (6.14); (wg A.S. Wolmir [7]):

$$M_{skr} \cong 0,508 \cdot \pi \cdot E \cdot h^2 \cdot \sqrt{h \cdot R} \text{ [Nmm]} \text{ lub } \tau_{kr} = 0,254 \cdot E \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^3} \text{ [MPa]} \quad (6.14)$$

Przez krytyczną wartość momentu skręcającego należy, w tym przypadku, rozumieć wartość momentu powodującego utratę stateczności ścianki cienkościennej rury równoznaczną ze zniszczeniem elementu. Bardziej obszernie omówienie tego zagadnienia znajdzie Czytelnik w rozdziale 9.

Ekstremalnego wyężenia materiału w przekroju pręta pokazanego na rys. 6.1 należy oczekiwać w punkcie  $D$ , gdzie występują ekstremalne naprężenia  $\sigma_{g \max}$  oraz ekstremalne naprężenia styczne  $\tau_{s \max}$ . Dla zachowania pewności celowe jest jeszcze sprawdzenie naprężeń w punkcie  $A$  (rys. 6.1c), gdzie następuje sumowanie naprężeń stycznych  $\tau_{T \text{extr}}$  oraz  $\tau_{S \text{extr}}$ .

Wyznaczenie wartości ekstremalnego wyężenia, co odpowiada często wyznaczeniu ekstremalnej wartości naprężenia zredukowanego  $\sigma_{z \max}$ , wymaga wykonania obliczeń często dla kilku przekrojów analizowanego pręta w punktach wskazanych powyżej. Wybór hipotezy wyężeniowej zależy w dużym stopniu od materiału pręta (wału). W konstrukcjach mechanicznych ze względu na często występującą cykliczną zmienność obciążeń oraz stosowane materiały, wykazujące najczęściej



Rys. 6.1. Zginanie ze skręcaniem prętów o przekrojach kołowo-symetrycznych: a) schemat statyczny i wykresy sił wewnętrznych, b) rozkłady naprężeń stycznych  $\tau$  oraz  $\sigma_g$  w przekroju kołowym, c) rozkłady naprężeń  $\tau_s$ ,  $\sigma_g$ ,  $\tau_x$  w przekroju pierścieniowym

zdolność do odkształceń plastycznych, zazwyczaj (choć nie zawsze) stosuje się hipotezę Hubera-Misesa-Hencky'ego. Często wykonuje się także klasyczne obliczenia do wyznaczania wytrzymałości zmęczeniowej, uwzględniające wpływ różnych składowych stanu naprężenia na trwałość zmęczeniową konstrukcji. Odpowiednie zasady obliczeń można znaleźć w pracy [3]. Postacie wzorów dla wyliczenia naprężeń zredukowanych najłatwiej sformułować ze wzoru (6.9), dla przykładu w punkcie A:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0; \tau_{zx\max} = \tau_{s\max} + \tau_{T\max}; \text{zatem } \sigma_{zr}^A = \sqrt{3} \cdot \tau_{zx\max} \quad (6.15)$$

**Uwaga:** W przypadku przekroju w formie pełnego koła naprężenia  $\tau_{T\max}$  prawie zawsze będą niewielkie i nie będą odgrywać istotnej roli dla wyężenia materiału.

W przypadku przekroju w formie pierścienia kołowego naprężenia  $\tau_{T\max}$  mogą przyjmować wartości uzasadniające ich uwzględnienie i należy je obliczać wzorem:

$$\tau_{T\max} = \frac{T_z \cdot S_y(z)}{(d_z - d_w) \cdot J_y}; \text{ gdzie } S_y(z) = \frac{1}{12}(d_z^3 - d_w^3) = \frac{h}{12}(d_z^2 + d_z d_w + d_w^2) \quad (6.16)$$

gdzie:

$d_z, d_w$  – średnice pierścienia kołowego,  
 $S_y(z)$  – moment statyczny połowy przekroju względem osi obojętnej zginania,  
 $J_y$  – moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej zginania.

Wartość  $\tau_{T\max}$ , obliczoną ze wzoru (6.16), należy podstawić do wzoru (6.15).

W przypadku przekroju pręta w postaci pełnego koła położenie punktu o największym wyężeniu jest zdefiniowane płaszczyzną zginania, która definiuje punkty z  $\sigma_{g\text{extr}}$ , co wobec występowania  $\tau_{s\text{max}}$  we wszystkich punktach obwodu zewnętrznego jednoznacznie wskazuje, że  $\sigma_{zr\text{max}}$  wystąpi w punktach, gdzie  $\sigma_x = \sigma_{g\text{extr}}$  i może być obliczone z zależności:

$$\sigma_{zr\text{max}} = \sqrt{\sigma_{g\text{max}}^2 + 3 \cdot \tau_{s\text{max}}^2} = \frac{\sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4} M_s^2}}{W_g} \quad (6.17)$$

W przypadku stosowania hipotezy  $[\tau_{\text{max}}]$  konieczne jest przeprowadzenie dość prostej analizy stanu naprężenia, aby określić naprężenia główne. W rozpatrywanym przypadku zginania ze skręcaniem w każdym punkcie pręta występują dwie składowe stanu naprężenia  $\sigma_g$  oraz  $\tau = \tau_s \pm \tau_r$ , a w miejscu ekstremalnego wyężenia  $\sigma_{g\text{max}}$  oraz  $\tau = \tau_{s\text{max}}$ . Łatwo wykazać, że naprężenie zredukowane w myśl hipotezy  $[\tau_{\text{max}}]$  określone jest wzorem:

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma_g^2 + 4 \cdot \tau_s^2} = \frac{\sqrt{M_g^2 + M_s^2}}{W_g} \quad (6.18)$$

W niektórych podręcznikach wyrażenia  $\sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4} M_s^2}$  lub  $\sqrt{M_g^2 + M_s^2}$  nazywane są „momentem zredukowanym”, chociaż trudno doszukać się w nich sensu fizycznego odpowiadającego temu określeniu i nazwę tę należy traktować umownie, bez podawania jakiegokolwiek interpretacji fizycznej.

## 6.3.2. ZGINANIE ZE SKRĘCANIEM PRĘTÓW O PRZEKROJACH NIESPEŁNIAJĄCYCH WARUNKÓW KOŁOWEJ SYMETRII

### 6.3.2.1. Wprowadzenie i zasady ogólne

Przedstawiony w punkcie 3.1 schemat postępowania przy analizie wyężenia materiału w zginanych i skręcanych prętach o przekrojach kołowo-symetrycznych wyczerpuje w zasadzie przypadki przydatne realizatorom obliczeń konstrukcyjnych takich prętów. W prętach o przekrojach kołowo-symetrycznych nie należy oczekiwać dużej różnorodności schematów zniszczenia. Jeden z takich nietypowych schematów, tj. utrata stateczności cienkościennej rury wskutek skręcania, został omówiony w poprzednim punkcie wraz z zacytowaniem wzoru na wyznaczenie wartości krytycznej momentu skręcającego. Zdaniem autorów przedstawione zagadnienia są wystarczającą podstawą do dalszych studiów w przedmiocie *podstawy konstrukcji maszyn*.

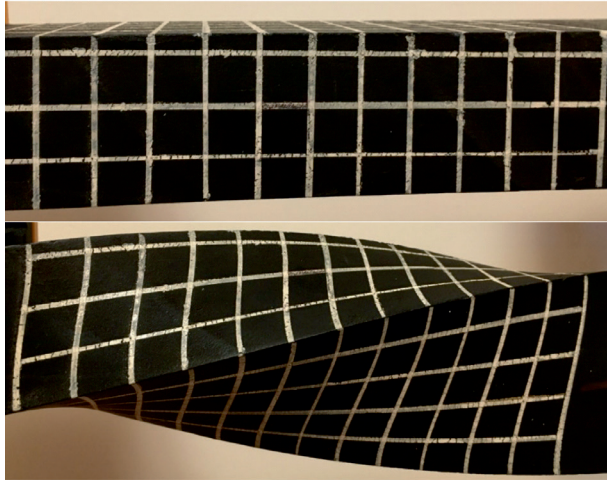
Analiza wyężenia materiału zginanych i skręcanych prętów o przekrojach niespełniających warunków kołowej symetrii sprawia znacznie więcej trudności, choćby tylko ze względu na różnorodność kształtów przekrojów. W takich prętach często może wystąpić zginanie ukośne z udziałem ścinania. Możliwe jest także pojawienie się nieoczekiwanego skręcania pręta wskutek omińnięcia przez płaszczyznę (obciążenia) działania sił tzw. „środką ścinania”. Wspomniany efekt skręcania wystąpi mimo formalnego braku momentu skręcającego w wyniku redukcji sił do środka ciężkości przekroju pręta. Problem ten jest przedmiotem szczegółowych rozważań rozdziału 5 niniejszej książki. W bieżącym rozdziale przedstawiono analizę przypadków, gdy środek ścinania pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju. Oba wymienione punkty charakterystyczne przekroju leżą zawsze na osiach symetrii. Jeżeli przekrój poprzeczny posiada dwie osie symetrii, wówczas środek ciężkości i środek ścinania leżą w punkcie przecięcia osi symetrii, czyli pokrywają się.

Przed przystąpieniem do prezentacji metodyki analizy skręcania prętów o przekrojach niekołowych warto zwrócić uwagę na różnice w sposobie odkształceń takich prętów od charakteru odkształceń prętów o przekrojach kołowo-symetrycznych. W skręcanych prętach niekołowych występuje zjawisko deplanacji przekrojów poprzecznych (rys. 6.2), które w przypadku skręcania nieswobodnego generuje dodatkowe naprężenia normalne (osiowe). Na rys. 6.2 widoczne są zakrzywienia linii prostopadłych do osi pręta (o przekroju prostokątnym), będących śladami jego przekrojów poprzecznych na poboczniczy. Widoczne zakrzywienia świadczą o deplanacji przekrojów poprzecznych. Skręcanie nieswobodne, generujące naprężenia osiowe, występuje przede wszystkim wówczas, gdy blokowane są przemieszczenia poosiowe czołowych powierzchni pręta.

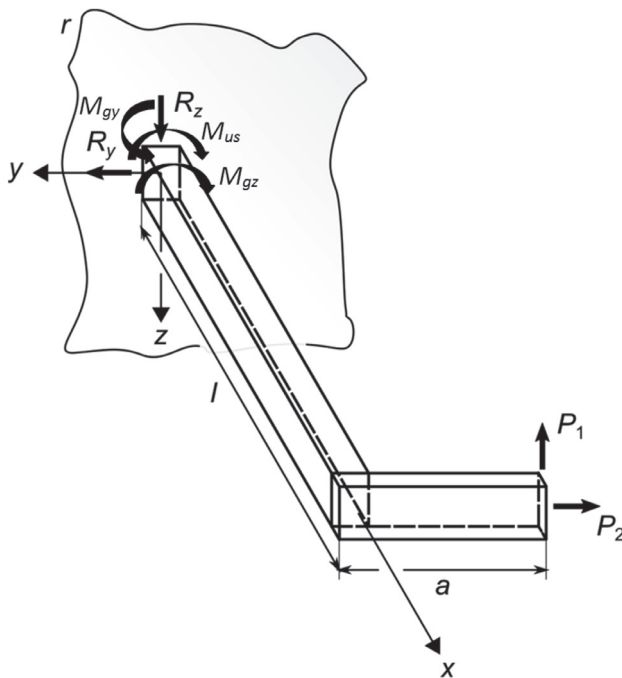
W dalszej części tego punktu zostanie szczegółowo zaprezentowana analiza wyężenia materiału pręta o przekroju prostokątnym pełnym, poddanego skręcaniu oraz ukośnemu zginaniu z udziałem sił poprzecznych. Schemat konstrukcji pręta podda-



wanego analizie w dalszej części bieżącego rozdziału pokazano na rys. 6.3, gdzie przedstawiono ogólne literowe symbole wymiarów konstrukcyjnych. Rzeczywiste wymiary analizowanej konstrukcji zostaną podane w przykładzie obliczeniowym.



Rys. 6.2. Obraz deformacji skręcanego pręta o przekroju prostokątnym – widoczne efekty deplanacji przekrojów



Rys. 6.3. Schemat statyczny pręta o przekroju prostokątnym poddanego zginaniu ze skręcaniem

Równocześnie autorzy rozdziału pragną zasygnalizować, że po zakończonych rozważaniach analitycznych przewidziane są analizy tych samych zagadnień z wykorzystaniem Metody Elementów Skończonych w punkcie 6.4. Analizy numeryczne pomogą w wyjaśnieniu pewnych zagadnień, których analiza klasycznymi metodami jest trudna lub bardzo trudna, a wyjaśnienie niektórych zjawisk w prętach o przekrojach niespełniających warunków kołowej symetrii jest przydatne dla inżyniera mechanika pracującego w tworzeniu nowych rozwiązań konstrukcyjnych.

### 6.3.2.2. Wyznaczanie sił wewnętrznych w modelu obliczeniowym

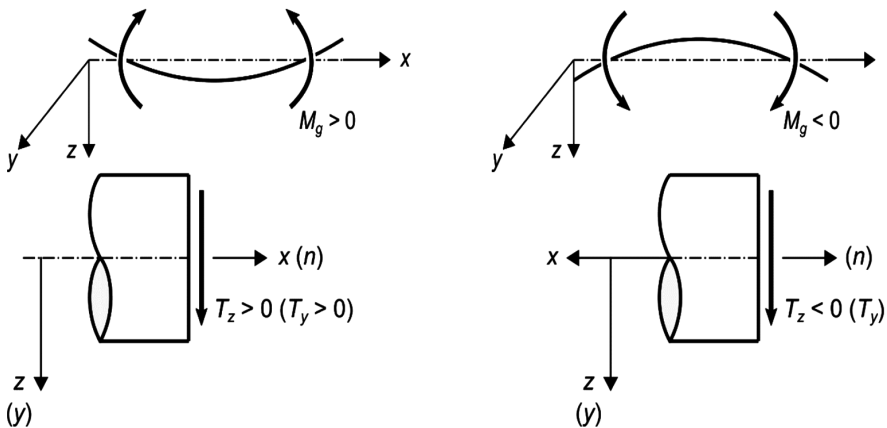
W procedurach obliczania naprężeń w przekrojach poprzecznych przyjęto zasadę opatrywania sił wewnętrznych ( $M_s$ ,  $M_{gy}$ ,  $M_{gz}$ ,  $T_z$ ,  $T_y$ ) znakami zgodnie z ogólnie przyjętymi do tego celu regułami oraz podstawiania współrzędnych punktów (w których liczone są naprężenia) także z właściwymi znakami. Gwarantuje to uzyskanie wartości naprężeń opatrzonych poprawnym znakiem bez potrzeby rozpatrywania odkształceń, które może prowadzić do pomyłek.

Przed przystąpieniem do wyznaczania sił wewnętrznych przez klasyczną redukcję do środka (środków) ciężkości przekrojów pręta zaleca się sprawdzenie, czy płaszczyzna lub płaszczyzny obciążenia są płaszczyznami symetrii pręta, czyli przechodzą przez środek ścinania. Przy braku płaszczyzn symetrii **celowe** jest sprawdzenie położenia środka ścinania względem płaszczyzny obciążenia.

Dla przypomnienia zasad ustalania znaków sił wewnętrznych w prętach przytoczono poniżej teksty obowiązujących umów wraz z obrazującymi je rysunkami – rys. 6.4.

Moment skręcający uważamy za dodatni, jeżeli zwrot wektora  $M_s$  jest zgodny ze zwrotem normalnej zewnętrznej do przekroju, przy zwrocie przeciwnym  $M_s < 0$ .

Moment zginający w przekroju pręta (belki) uważamy za dodatni, jeżeli wygina pręt wypukłością zgodnie z dodatnim zwrotem osi ugięć (przemieszczeń).



Rys. 6.4. Ilustracja umów o znakach sił wewnętrznych w prętach

Siłę poprzeczną uważamy za dodatnią, jeżeli działając w przekroju, którego normalna zewnętrzna jest zgodna z osią układu współrzędnych, posiada zwrot zgodny z drugą osią układu współrzędnych; lub jeżeli działając w przekroju, którego normalna zewnętrzna jest przeciwnie skierowana niż oś układu współrzędnych, posiada zwrot przeciwny do drugiej osi układu współrzędnych. W pozostałych dwóch możliwych przypadkach zgodności lub niezgodności zwrotów sił oraz osi układu współrzędnych siły poprzeczne uważane są za ujemne.

Analogiczna umowa o znakach dotyczy naprężeń stycznych od sił poprzecznych.

### 6.3.2.3. Wyznaczanie sił wewnętrznych w rozpatrywanym pręcie

Schemat obciążenia pręta wraz z pokazanymi siłami obciążającymi oraz podstawowymi wymiarami przekroju poprzecznego przedstawiono na rys. 6.3. Dla zaprezentowanego schematu oraz układu obciążeń siły wewnętrzne w części pręta prostopadłej do płaszczyzny utwierdzenia określone są zależnościami:

$$T_z = -P_1; T_y = -P_2 \quad (6.19)$$

$$M_{gy} = P_1(L-x); M_{gz} = P_2(L-x); M_s = P_1 \cdot a \quad (6.20)$$

### 6.3.2.4. Obliczanie naprężeń od skręcania w przekroju prostokątnym

Dla dominującej większości przekrojów prętów skręcanych nie udaje się uzyskać klasycznych wzorów na obliczanie naprężeń stycznych. Problem stanu naprężenia w przekroju pręta skręcanego o kształcie niekołowym jest często określany jako zagadnienie de Saint-Venanta, rozwiązywane tzw. metodą półodwrotną teorii sprężystości. Układy równań różniczkowych oraz warunki brzegowe sprawiają, że w większości przypadków uzyskuje się rozwiązania przybliżone, np. w postaci szeregów. Jak wspomniano powyżej, lokalne ekstrema naprężeń od skręcania w przekroju prostokątnym występują w środkach boków, przy czym maksimum bezwzględne występuje w środku boku dłuższego. Zwroty naprężeń stycznych we wszystkich punktach przekroju są zgodne z kierunkiem obrotu zamierzonego przez działający moment skręcający, co pokazano na rys. 6.5.

Naprężenia styczne (ekstremalne) w środkach boków prostokąta można wyznaczyć ze wzorów:

$$\tau_h = \pm \frac{M_s}{\kappa_2 \cdot b^2 \cdot h} \quad (6.21)$$

$$\tau_b = \pm \frac{\kappa_3}{\kappa_2} \frac{M_s}{b^2 \cdot h} \quad \text{lub} \quad \tau_b = \kappa_3 \cdot \tau_h \quad (6.22)$$

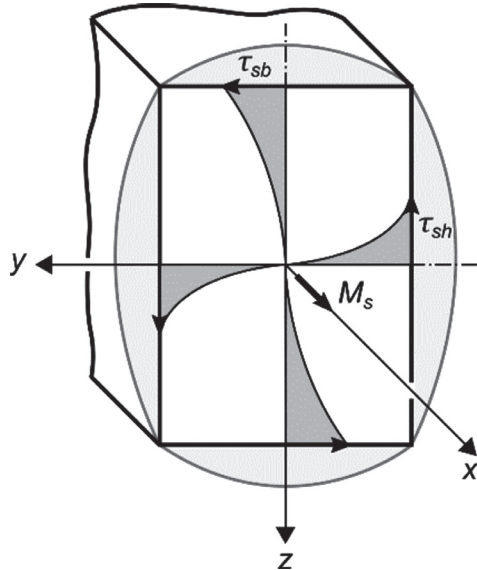
Sztywność skręcania oblicza się z zależności:

$$C_s = \kappa_1 \cdot G \cdot b^3 \cdot h : \vartheta = \frac{M_s}{\kappa_1 \cdot G \cdot b^3 \cdot h} \quad (\text{jednostkowy kąt skręcenia}) \quad (6.23)$$

Tabela 6.1

Wartości współczynników  $\kappa_1; \kappa_2; \kappa_3$  [4]

$S = h/b$	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	10,0
$\kappa_1$	0,140	0,196	0,228	0,264	0,280	0,299	0,307	0,312
$\kappa_2$	0,208	0,231	0,246	0,267	0,281	0,299	0,507	0,312
$\kappa_3$	1,000	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742



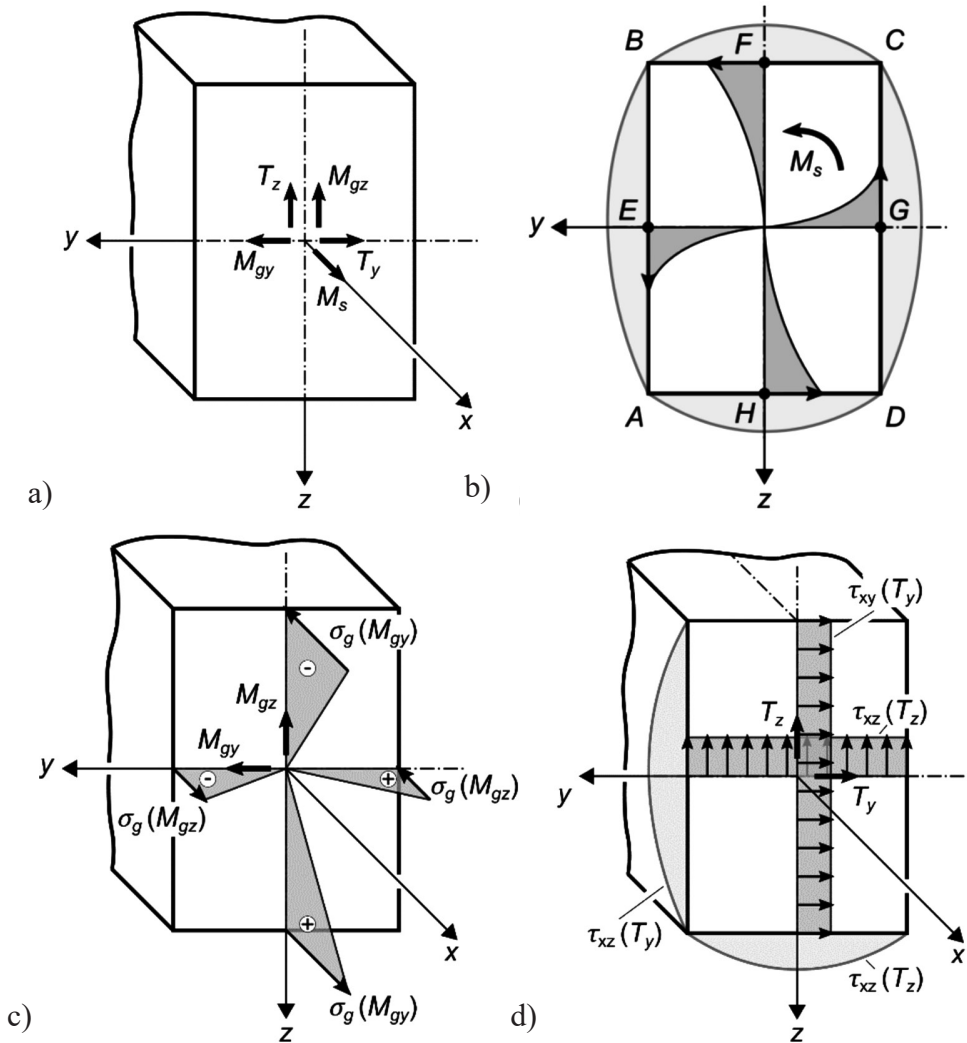
Rys. 6.5. Rozkład naprężeń stycznych od skręcania w przekroju prostokątnym

### 6.3.2.5. Wyznaczanie naprężeń w punktach charakterystycznych przekroju pręta

Przed rozpoczęciem analizy wyężenia materiału pręta w wybranym przekroju poprzecznym warto przypomnieć rozkłady: sił wewnętrznych –  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $M_{gz}$ ,  $M_{gy}$ ,  $M_s$  (rys. 6.6a), naprężeń od skręcania  $\tau_s$  (rys. 6.6b), od zginania momentem  $M_{gy}$  oraz  $M_{gz}$  (rys. 6.6c) i od sił poprzecznych  $T_z$  oraz  $T_y$  – naprężenia  $\tau_{xy}$  i  $\tau_{xz}$  (rys. 6.6d).

W przekroju prostokątnym poddanym zginaniu w dwóch płaszczyznach, obciążeniu siłami poprzecznymi w dwóch płaszczyznach oraz skręcaniu można wy-

różnić osiem punktów, w których wyężenie materiału pręta może osiągnąć ekstremum. Wspomniane punkty to: cztery wierzchołki prostokąta (naroża), gdzie może wystąpić sumowanie ekstremalnych naprężeń od zginania ( $\sigma_{gextr}$ ), oraz środki czterech boków prostokąta, w których można oczekiwać ekstremum jednego z naprężeń  $\sigma_{gextr}$ , lokalnych ekstremów naprężeń stycznych od skręcania oraz lokalnych ekstremów naprężeń stycznych od sił poprzecznych, które mogą sumować się (po jednej stronie przekroju) z naprężeniami od skręcania (naprężenia od skręcania mają na całym obwodzie zwroty zgodne z kierunkiem obrotu dyktowanym przez  $M_s$ ).



Rys. 6.6. Siły wewnętrzne i naprężenia w przekroju prostokątnym: a) układ sił wewnętrznych, b) rozkład naprężeń stycznych od skręcania, c) rozkłady naprężeń normalnych od zginania, d) rozkłady naprężeń stycznych od sił poprzecznych

Wzory obliczeniowe dla naprężeń w wymienionych ośmiu punktach można zapisać:

$$\sigma_x = \sigma_{g(y)} + \sigma_{g(z)} = \frac{M_{gy}}{J_y} \cdot z_{Ai} + \frac{M_{gz}}{J_z} \cdot y_{Ai}; \text{ gdzie } J_y = \frac{b \cdot h^3}{12}; J_z = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad (6.24)$$

natomiast pod symbolem  $A_i$  należy rozumieć kolejno punkty od  $A$  do  $H$ .

Ekstremalne naprężenia styczne od sił poprzecznych występują w środkach boków i określone są wzorami:

$$\tau_{xzextr} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_z}{F}; \tau_{xyextr} = \frac{3}{2} \cdot \frac{T_y}{F} \quad (6.25)$$

gdzie:  $T_z$  oraz  $T_y$  – siły styczne (lub poprzeczne).

Wartości naprężeń stycznych od sił poprzecznych są, na całej szerokości przekroju, równe i mają zwroty zgodne ze zwrotami sił poprzecznych wywołujących te naprężenia, według wzorów (6.19) i (6.20).

Naprężenia styczne wynikające ze skręcania  $\tau_b$  oraz  $\tau_h$  określone są wzorami (6.21) i (6.22), przy czym zwroty tych naprężeń, a zatem ich znaki wynikają ze zwrotu momentu skręcającego (6.20) i są zgodne z kierunkiem obrotu zamierzonego przez moment skręcający.

Wobec omówionych powyżej zasad ustalania znaków (zwrotów) naprężeń stycznych od skręcania i od ścinania zawsze po jednej ze stron przekroju wartości naprężeń stycznych będą się dodawać (co do wartości bezwzględnej), natomiast po stronie przeciwnej będą się odejmować. Dla większości hipotez wytrzymałościowych znaki naprężeń stycznych mają znaczenie na etapie sumowania w punkcie, natomiast we wzorach na naprężenie zredukowane naprężenia styczne zazwyczaj występują w drugiej potędze, co neutralizuje wpływ znaku tych naprężeń na wartość naprężenia zredukowanego.

### 6.3.2.6. Przykład liczbowy dla przekroju prostokątnego

Wymiary pręta:

$$L = 800 \text{ [mm]}; a = 200 \text{ [mm]}; b = 40 \text{ [mm]}; h = 60 \text{ [mm]};$$

$$P_1 = 1500 \text{ [N]}; P_2 = 1000 \text{ [N]}.$$

$$J_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{40 \cdot 60^3}{12} = 720\,000 \text{ [mm}^4\text{]} = 7,2 \cdot 10^5 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$W_{gy} = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{40 \cdot 60^2}{6} = 24\,000 \text{ [mm}^3\text{]}$$

$$J_z = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{60 \cdot 40^3}{12} = 320\,000 \text{ [mm}^4\text{]} = 3,2 \cdot 10^4 \cdot 10^4 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$W_{gz} = \frac{h \cdot b^2}{6} = \frac{60 \cdot 40^2}{6} = 16\,000 [\text{mm}^3]$$

$$F = b \cdot h = 40 \cdot 60 = 2400 [\text{mm}^2]$$

$$M_{g_y \max} = M_{g_y}(0) = P_1 \cdot L = 1500 \cdot 800 = 1\,200\,000 [\text{Nmm}] = 1,2 \cdot 10^6 [\text{Nmm}]$$

$$M_{g_z \max} = M_{g_z}(0) = P_2 \cdot L = 1000 \cdot 800 = 800\,000 [\text{Nmm}] = 0,8 \cdot 10^6 [\text{Nmm}]$$

$$M_s = P_1 \cdot a = 1500 \cdot 200 = 300\,000 [\text{Nmm}] = 0,3 \cdot 10^6 [\text{Nmm}]$$

$$T_z = -P_1 = -1500 [\text{N}], T_y = -P_2 = -1000 [\text{N}]$$

Obliczanie naprężeń stycznych od  $M_s$ .

$$\frac{h}{b} = \frac{60}{40} = 1,5 \quad \text{zatem} \quad \kappa_2 = 0,231, \kappa_3 = 0,859$$

$$\tau_h = \pm \frac{M_s}{\kappa_2 \cdot b^2 \cdot h} = \pm \frac{-300\,000}{0,231 \cdot 40^2 \cdot 60} = \pm 13,53 [\text{MPa}]$$

$$\tau_b = \pm \frac{\kappa_3}{\kappa_2} \frac{M_s}{b^2 \cdot h} = \pm \frac{0,859}{0,231} \cdot \left( -\frac{300\,000}{40^2 \cdot 60} \right) = \pm 11,62 [\text{MPa}]$$

**Tabela 6.2**

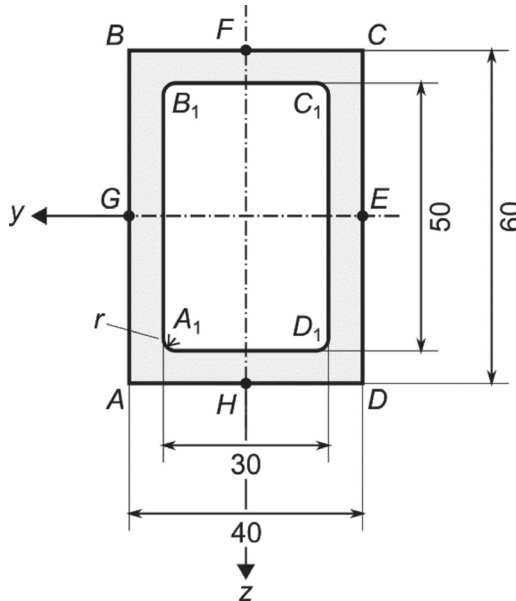
Zestawienie obliczonych naprężeń składowych i zredukowanych

	$\sigma_A$ [MPa]	$\sigma_B$ [MPa]	$\sigma_C$ [MPa]	$\sigma_D$ [MPa]	$\sigma_E$ [MPa]	$\sigma_F$ [MPa]	$\sigma_G$ [MPa]	$\sigma_H$ [MPa]
$\sigma_{g_x}(M_{g_y})$	50	-50	-50	50	0	-50	0	50
$\sigma_{g_x}(M_{g_z})$	50	50	-50	-50	50	0	-50	0
$\sigma_x$	100	0	-100	0	50	-50	-50	50
$\tau_{xxy}$	0	0	0	0	0	11,62	0	-11,62
$\tau_{xxz}$	0	0	0	0	13,53	0	-13,53	0
$\tau_{xy}(T_y)$	0	0	0	0	0	-0,63	0	-0,63
$\tau_{xz}(T_z)$	0	0	0	0	-0,70	0	-0,70	0
$\sigma_{zr}(HMH)$	100	0	100	0	55,23	53,91	55,23	53,91

**Uwaga:** Przy obliczonych wartościach naprężeń stycznych wywołanych przez moment skręcający pozostawiono znak  $\pm$ , gdyż znaki tych naprężeń w różnych punktach charakterystycznych przekroju będą różne, co wyjaśniono wcześniej – zwroty  $\tau_h$  oraz  $\tau_b$  wynikają z kierunku obrotu zamierzonego przez moment skręcający, natomiast znaki obiektywne z ogólnej umowy o znakach naprężeń stycznych.

### 6.3.3. ANALIZA WYTĘŻENIA MATERIAŁU PRĘTA O PRZEKROJU SKRZYNKOWYM O ZARYSIE PROSTOKĄTNYM

W niniejszym punkcie zostanie zaprezentowana skrócona wersja systemowej analizy wyjątków materiału w zginanym i skręcanym pręcie o przekroju cienkościennym skrzyńkowym zamkniętym o zarysie prostokątnym, przy zapewnieniu swobody przemieszczeń przekrojów końcowych. Obliczenia naprężeń w strefie utwierdzenia w aktualnym punkcie zostaną wykonane bez uwzględnienia blokady przemieszczeń wymuszanej przez utwierdzenie. Analiza spiętrzeń naprężeń powodowanych przez blokowanie deplacji przekroju przylegającego do ściany (tj. utwierdzonego) zostanie wykonana w trakcie obliczeń wykonywanych metodą elementów skończonych wraz ze szczegółowymi wyjaśnieniami w p. 6.4. W celu umożliwienia porównań między prętem o przekroju w postaci pełnego prostokąta oraz przekroju skrzyńkowego o tych samych gabarytach zewnętrznych i ściance o grubości 5,0 mm (rys. 6.7) obliczenia będą prowadzone dla tego samego schematu statycznego, przy takich samych wartościach sił obciążających, co pozwoli na przeprowadzenie porównania

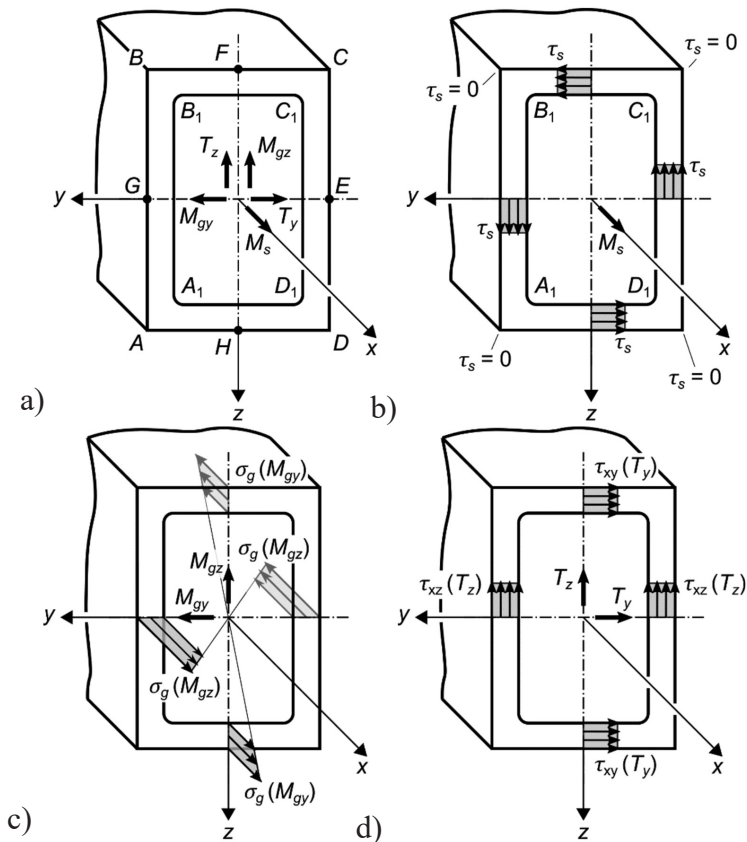


Rys. 6.7. Obraz przekroju skrzyńkowego



skutków wprowadzenia przekroju skrzynkowego (o tych samych gabarytach i ściance 5 mm) dla wartości i rozkładu naprężeń oraz wyężenia materiału analizowanego pręta. Pozwoli to, zdaniem autorów, na zilustrowanie metodyki analizy wyężenia materiału prętów o przekrojach niekołowych wyrażonych w często spotykanych przypadkach (konstrukcjach). Dodatkowo pozwoli to zobaczyć skutki, dla naprężeń, zmniejszenia masy o około 60%. Oczywiście obliczenia wymagają nieco szerszej znajomości metod wytrzymałości materiałów.

Niezależnie od rozwoju komputerowych metod analizy wytrzymałościowej, znajomość istoty zjawisk w obciążonych konstrukcjach oraz metodyki ich analizy powinna być cechą prowadzących obliczenia wytrzymałościowe. Należy pamiętać, że obliczenia wytrzymałościowe prowadzi konstruktor i ponosi za nie odpowiedzialność, a komputer jest w jego pracy tylko narzędziem. Doświadczenie autorów wskazuje, że poważniejsze „katastrofy” nie powstają z powodu drobnych (np. kilku bądź nawet kilkunastoprocenowych) pomyłek w obliczeniach, ale zwykle wskutek pominięcia schematu zniszczenia bądź błędnej jego interpretacji lub niewykrytych wad materiałowych.



Rys. 6.8. Układ sił wewnętrznych w przekroju poprzecznym (a) i rozkłady naprężeń:  $\tau_s$  od skręcania (b),  $\sigma_g$  od zginania (c),  $\tau_{xy}$  oraz  $\tau_{xz}$  od sił poprzecznych (d), w przekroju skrzynkowym pręta wg rys. 6.3

Zasady analizy stanu naprężenia w zginanym i skręcanym pręcie o przekroju w kształcie zamkniętej skrzynki o zewnętrznym zarysie w formie prostokąta są podobne do obliczeń naprężeń od zginania oraz od ścinania (siły poprzeczne) jak dla pełnego prostokąta. Podobnie jak poprzednio, ekstremalnych naprężeń od zginania należy oczekiwać w jednym z naroży zewnętrznych lub środków boków zarysu zewnętrznego. Obliczenia  $\sigma_g$  wykonuje się według tych samych reguł jak poprzednio. Analogiczna zasada postępowania obowiązuje dla naprężeń stycznych od sił poprzecznych, oczywiście z uwzględnieniem kształtu przekroju poprzecznego. Wzory obliczeniowe podobne jak dla pierścienia kołowego. Układy sił wewnętrznych:  $T_z$ ,  $T_y$ ,  $M_{gy}$ ,  $M_{gz}$  oraz  $M_s$  pokazano na rys. 6.8a; rys. 6.8b przedstawia rozkład naprężeń stycznych od skręcania  $\tau_s$ ; na rys. 6.8c pokazano rozkłady naprężeń od zginania  $\sigma_g(M_{gy})$  i  $\sigma_g(M_{gz})$ , natomiast na rys. 6.8d pokazano rozkłady naprężeń stycznych od sił poprzecznych  $T_y$  i  $T_z$ .

Istotna różnica w metodzie obliczania naprężeń występuje przy wyznaczaniu naprężeń stycznych wynikających z działania momentu skręcającego. W przypadku cienkościennych przekrojów zamkniętych przy obliczaniu naprężeń  $\tau_s(M_s)$  wykorzystuje się tzw. „analogię hydrodynamiczną”.

**Analogia hydrodynamiczna zakłada, że rozkład naprężeń  $\tau_s$  w ściance jest taki jak rozkład prędkości nielepkiej cieczy krążącej w kanale o szerokości równej grubości ścianki przekroju.**

Naprężenie styczne wywołane momentem skręcającym można zatem obliczać z wzoru:

$$\tau_s = \frac{M_s}{2 \cdot \delta \cdot F_{sr}} \quad (6.26)$$

gdzie:

$\delta$  – grubość ścianki;

$F_{sr}$  – całkowite pole obszaru zawartego w obrębie linii środkowej profilu cienkościennego.

Dla doświadczalnej weryfikacji obliczeń w przypadku skręcania istotne znaczenie może mieć możliwość porównania obliczonego oraz zmierzonego kąta skręcenia pręta. Pomiar kąta skręcenia jest stosunkowo łatwy przez pomiar przemieszczenia wskaźnika związanego sztywno z przekrojem końcowym skręcanego pręta. W literaturze można znaleźć wzory na obliczenie jednostkowego kąta skręcenia  $\vartheta$ , zacytowane poniżej:

$$\vartheta = \frac{\tau_s \cdot l_s}{2 \cdot F_{sr} \cdot G} \quad (6.27)$$

gdzie:

$l_s$  – długość linii środkowej ścianki przekroju,

$(G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)})$  pozostałe symbole wg oznaczeń wzoru (6.26).

Wobec przyjętego założenia realizacji analizy wyężenia materiału dla pręta o tym samym kształcie i takich samych obciążeniach wykorzystane zostaną obliczenia sił wewnętrznych wykonane wcześniej w punktach 6.3.2.2 oraz 6.3.2.3, które dla ułatwienia Czytelnikowi zestawiono poniżej:

$$T_z = -P_1; T_y = -P_2$$

$$M_{gy} = P_1(L - x); M_{gz} = P_2(L - x); M_s = P_1 \cdot a$$

$$M_{gy \max} = M_{gy}(0) = P_1 \cdot L = 1500 \cdot 800 = 1\,200\,000 \text{ [Nmm]} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

$$M_{gz \max} = M_{gz}(0) = P_2 \cdot L = 1000 \cdot 800 = 800\,000 \text{ [Nmm]} = 0,8 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

$$M_s = P_1 \cdot a = 1500 \cdot 200 = 300\,000 \text{ [Nmm]} = 0,3 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

$$T_z = -P_1 = -1500 \text{ [N]}, T_y = -P_2 = -1000 \text{ [N]}$$

### 6.3.3.1. Obliczenie naprężeń wywołanych przez moment skręcający

Zależności opisujące poszczególne składowe stanu naprężenia w poszczególnych punktach charakterystycznych przekroju, tzn. tych, w których mogą wystąpić ekstremalne wartości naprężeń od zginania, ścinania oraz skręcania, wykazują znaczne podobieństwa. Pozwala to na podjęcie próby sformułowania skróconego zapisu wskaźnikowego (podobnego do stosowanego poprzednio), poprawnego dla wszystkich punktów przy odpowiedniej zmianie wskaźników, tj. punktów i ich współrzędnych oraz sił wewnętrznych.

Przy obliczaniu naprężeń wywołanych momentem skręcającym w cienkościennym przekroju zamkniętym wykorzystuje się tzw. analogię hydrodynamiczną. Odstępstwa od tej reguły występują w narożach wewnętrznych i zewnętrznych, co omówiono dalej.

Naprężenia styczne od skręcania w przekroju cienkościennym zamkniętym określa wzór (6.26):

$$\tau_s = \frac{M_s}{2 \cdot \delta \cdot F_{sr}}, \text{ oznaczenia według wzoru (6.26), natomiast } F_{sr} = \frac{1}{4}(B+b)(H+h).$$

Dla założonych wymiarów przekroju rozpatrywanego pręta (rys. 6.7):

$$F_{sr} = \frac{1}{4}(40+30) \cdot (60+50) = 1925 \text{ [mm}^2\text{]}; \delta = 5,0 \text{ [mm]}$$

$$\tau_s = \frac{M_s}{2 \cdot 5 \cdot 1925} = \frac{300\,000}{2 \cdot 5 \cdot 1925} = 15,58 \text{ [MPa]}$$

Jak wspomniano wcześniej, w myśl analogii hydrodynamicznej naprężenia styczne od momentu skręcającego przyjmą powyższą wartość we wszystkich punktach

ścianki przekroju, z wyłączeniem naroży zewnętrznych, gdzie przyjmuje się wartość zero, oraz wewnętrznych, gdzie występuje koncentracja naprężeń stycznych.

**Uwaga:** W przypadku skręcania prętów o cienkościennych przekrojach zamkniętych występuje efekt spiętrzenia naprężeń stycznych  $\tau_s$  w wewnętrznych narożach przekroju poprzecznego. Problem tego spiętrzenia naprężeń stycznych został rozwiązany metodami teorii sprężystości i jego wartość zależy od stosunku grubości ścianki do promienia zaokrąglenia wewnętrznego naroża przekroju. Poniżej przedstawiono zależność (6.28) na wyznaczenie współczynnika koncentracji naprężeń stycznych w narożu wewnętrznym przekroju rozpatrywanego pręta. Naprężenia styczne od skręcania w punktach naroży zewnętrznych rozpatrywanego przekroju, jak wspomniano wyżej, przyjmuje się równe 0 (zero).

$$\alpha_k = 1,74 \cdot \sqrt{\frac{\delta}{r}} \quad (6.28)$$

gdzie:

$\alpha_k$  – współczynnik koncentracji naprężeń w narożu wewnętrznym;

$\delta$  – grubość ścianki;

$r$  – promień zaokrąglenia w narożu.

Uwzględnianie w obliczeniach projektowych spiętrzenia naprężeń jest szczególnie ważne w przypadku prętów obciążonych siłami cyklicznie zmiennymi, czyli w warunkach tzw. zmęczenia materiałów. Dla przykładu przy założeniu  $r = \delta = 5,0$  [mm] współczynnik koncentracji naprężeń w narożu wewnętrznym wynosi  $\alpha_k = 1,74$ .

### 6.3.3.2. Obliczenia naprężeń normalnych od zginania i stycznych od ścinania

Naprężenia od zginania momentami  $M_{gy}$  oraz  $M_{gz}$  będą obliczane analogicznie jak dla pełnego prostokąta według wzorów (6.24) przytoczonych niżej:

$$\sigma_x = \sigma_{g(y)} + \sigma_{g(z)} = \frac{M_{gy}}{J_y} \cdot z_{Ai} + \frac{M_{gz}}{J_z} \cdot y_{Ai}; \text{ gdzie } J_y = \frac{b \cdot h^3}{12}; J_z = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad (6.29)$$

**Uwaga:** dla przekroju cienkościennego ze względu na koncentrację naprężeń od skręcania w narożach wewnętrznych celowe jest obliczenie naprężeń

$$\sigma_x = \sigma_{g(y)} \text{ oraz } \sigma_x = \sigma_{g(z)}$$

Dla przekroju cienkościennego momenty bezwładności względem osi obojętnych:

$$J_y = \frac{B \cdot H^3}{12} - \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{40 \cdot 60^3}{12} - \frac{30 \cdot 50^3}{12} = 407\,500 \text{ [mm}^4\text{]}$$

$$J_z = \frac{H \cdot B^3}{12} - \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{60 \cdot 40^3}{12} - \frac{50 \cdot 30^3}{12} = 207\,500 \text{ [mm}^4\text{]}$$

W dalszych obliczeniach wygodnie stosować dwie wartości wskaźników zginania względem każdej z osi obojętnych (wobec różnych odległości punktów na obwodzie zewnętrznym oraz wewnętrznym od osi obojętnych), które wynoszą:

$$W_{gy} = 13\,583, (3) [\text{mm}^3], \quad W_{gy}^w = 16\,300 [\text{mm}^3]$$

$$W_{gz} = 10\,375,0 [\text{mm}^3], \quad W_{gz}^w = 13\,833, (3) [\text{mm}^3]$$

Wartości naprężeń normalnych od zginania w punktach charakterystycznych wynoszą:

$$\sigma_{gA}^{Mgy} = \sigma_{gD}^{Mgy} = \frac{M_{gy \max}}{W_{gy}} = \frac{1\,200\,000}{13\,583,3} = +88,34 [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{gB}^{Mgy} = \sigma_{gC}^{Mgy} = -\frac{M_{gy \max}}{W_{gy}} = -88,44 [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{gA}^{Mgz} = \sigma_{gB}^{Mgz} = \frac{M_{gz \max}}{W_{gz}^w} = \frac{800\,000}{10\,375} = +77,11 [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{gD}^{Mgz} = \sigma_{gC}^{Mgz} = -\frac{M_{gz \max}}{W_{gz}^w} = -77,11 [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{gA1}^{Mgy} = \sigma_{gD1}^{Mgy} = \frac{M_{gy \max}}{W_{gy}^w} = \frac{1\,200\,000}{16\,300} = +73,62 [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{gB1}^{Mgy} = \sigma_{gC1}^{Mgy} = -\frac{M_{gy \max}}{W_{gy}^w} = -73,62 [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{gA1}^{Mgz} = \sigma_{gB1}^{Mgz} = \frac{M_{gz \max}}{W_{gz}^w} = \frac{800\,000}{13\,833,3} = +57,83 [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{gD1}^{Mgz} = \sigma_{gC1}^{Mgz} = -\frac{M_{gz \max}}{W_{gz}^w} = -57,83 [\text{MPa}]$$

Naprężenia od zginania momentami  $M_{gy}$  oraz  $M_{gz}$  w pozostałych punktach przekroju można wyznaczyć na podstawie ogólnych reguł oraz wartości wyliczonych powyżej.

$$\sigma_{gE}^{Mgy} = \sigma_{gG}^{Mgy} = 0; \quad \sigma_{gF}^{Mgz} = \sigma_{gH}^{Mgz} = 0$$

$$\sigma_{gF}^{Mgy} = -\sigma_{gH}^{Mgy} = \sigma_{gB}^{Mgy} = -88,44 [\text{MPa}]$$

$$\sigma_{gE}^{Mgz} = -\sigma_{gG}^{Mgz} = \sigma_{gB}^{Mgz} = 88,44 [\text{MPa}]$$

Kolejnym zagadnieniem jest obliczenie wartości naprężeń stycznych wywołanych przez siły poprzeczne  $T_y$  oraz  $T_z$ . W przypadku przekroju cienkościennego wartości naprężeń stycznych od działania sił poprzecznych będą mieć trochę większe znaczenie niż dla pełnego prostokąta.

Zasada obliczania ekstremalnych naprężeń stycznych od sił poprzecznych  $T_y$  oraz  $T_z$  jest analogiczna jak dla przekroju pierścieniowego, co opisuje wzór (6.16). Dla analizowanego przekroju skrzynkowego ekstremalne naprężenia styczne określone są wzorami:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z \cdot S_y(z)}{2 \cdot \delta \cdot J_y} \quad \text{gdzie } S_y(z) = \frac{1}{8} BH^2 - \frac{1}{8} bh^2 \quad \text{oraz } 2\delta = B - b \quad (6.30a)$$

$$\tau_{xy} = \frac{T_y \cdot S_z(y)}{2 \cdot \delta_1 \cdot J_z} \quad \text{gdzie } S_z(y) = \frac{1}{8} HB^2 - \frac{1}{8} hb^2 \quad \text{oraz } 2\delta_1 = H - h \quad (6.30b)$$

Dla rozpatrywanego przekroju momenty statyczne  $S_y(z)$  oraz  $S_z(y)$  wynoszą:

$$S_y(z) = 8625 [\text{mm}^3] \quad \text{oraz} \quad S_z(y) = 6375 [\text{mm}^3]$$

$$\tau_{xzE}^{Tz} = \tau_{xzG}^{Tz} = -\frac{1500 \cdot 8625}{2 \cdot 5 \cdot 407\,500} = -3,17 [\text{MPa}]$$

$$\tau_{xyF}^{Ty} = \tau_{xyH}^{Ty} = -\frac{1000 \cdot 6375}{2 \cdot 5 \cdot 207\,500} = -3,07 [\text{MPa}]$$

Obliczone powyżej naprężenia styczne od sił poprzecznych są wartościami ekstremalnymi.

Wartości naprężeń w punktach charakterystycznych zostaną zestawione w Tabeli 6.3; znaki naprężeń będą przyjęte zgodnie z regułami stosowanymi w wytrzymałości materiałów z jednym wyjątkiem dotyczącym naprężeń od skręcania, które mają zwroty zgodne z zamierzonym kierunkiem obrotu wymuszonym przez moment skręcający, natomiast ich znaki będą ustalane zgodnie z ich zwrotami w rozważanym punkcie. Odnośnie naprężeń od skręcania należy pamiętać, że ich wartości w narożach zewnętrznych przyjmuje się w obliczeniach analitycznych jako równe „zero”.

**Uwaga:** W zaokrąglonym narożu wewnętrznym można mówić o jednym naprężeniu stycznym od momentu skręcającego, oczywiście z uwzględnieniem koncentracji naprężeń stycznych. Przyjęte w Tabeli 6.3 oznaczenie naprężeń  $\tau_{syz}$  należy traktować umownie, gdyż wskutek zamkniętego obwodu przekroju trudno o jednolitą symbolikę naprężeń stycznych od skręcania. Naprężenia styczne od sił poprzecznych będą mniejsze od podanych w Tabeli 6.3/A wartości ekstremalnych i niewielkie wobec naprężeń od momentu skręcającego (poniżej 10%). Dla przykładu przy promieniu wewnętrznym  $r$ , dwukrotnie mniejszym od grubości ścianki, współczynnik spiętrzenia naprężeń stycznych wynosi  $\alpha_k = 3,48$ , natomiast  $\tau_{syz \max} = 54,24 [\text{MPa}]$ , to jest kilkunastokrotnie więcej od  $\tau_{xz \max}^{(T_z)} = 3,17 [\text{MPa}]$  w osi obojętnej przekroju.

Tabela 6.3

Wartości naprężeń w punktach charakterystycznych

Część A	A	B	C	D	E	F	G	H
	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
$\sigma_{g_x}(M_{g_y})$	88,34	-88,34	-88,34	88,34	0	-88,34	0	88,34
$\sigma_{g_x}(M_{g_z})$	77,11	77,11	-77,11	-77,11	77,11	0	-77,11	0
$\sigma_x$	165,45	-11,23	-165,45	11,23	77,11	-88,34	-77,11	88,34
$\tau_{sxy}$	0	0	0	0	0	15,58	0	-15,58
$\tau_{sxz}$	0	0	0	0	15,58	0	-15,58	0
$\tau_{xy}(T_y)$	0	0	0	0	0	-3,07	0	-3,07
$\tau_{xz}(T_z)$	0	0	0	0	-3,17	0	-3,17	0
$\sigma_{zr}(HMH)$	165,45	11,23	165,45	11,23	81,98	92,52	81,98	92,52

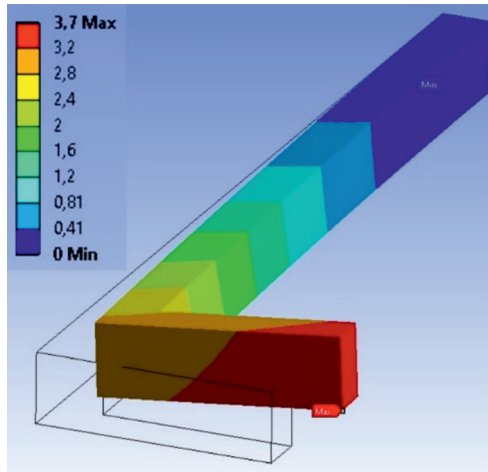
Część B	$A_1$	$B_1$	$C_1$	$D_1$
	[MPa]	[MPa]	[MPa]	[MPa]
$\sigma_{g_x}(M_{g_y})$	73,62	-73,62	-73,62	-73,62
$\sigma_{g_x}(M_{g_z})$	57,83	57,83	-57,83	57,83
$\sigma_x$	131,45	-15,79	-131,45	15,79
$\tau_{sxy}$	0	0	0	0
$\tau_{sxz}$	54,24	54,24	54,24	54,24
$\tau_{xy}(T_y)$	-	-	-	-
$\tau_{xz}(T_z)$	-	-	-	-
$\sigma_{zr}(HMH)$	161,57	95,26	161,57	95,26

#### 6.4. OBLICZENIA PRĘTÓW O PRZEKROJACH NIESPEŁNIAJĄCYCH WARUNKÓW KOŁOWEJ SYMETRII METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

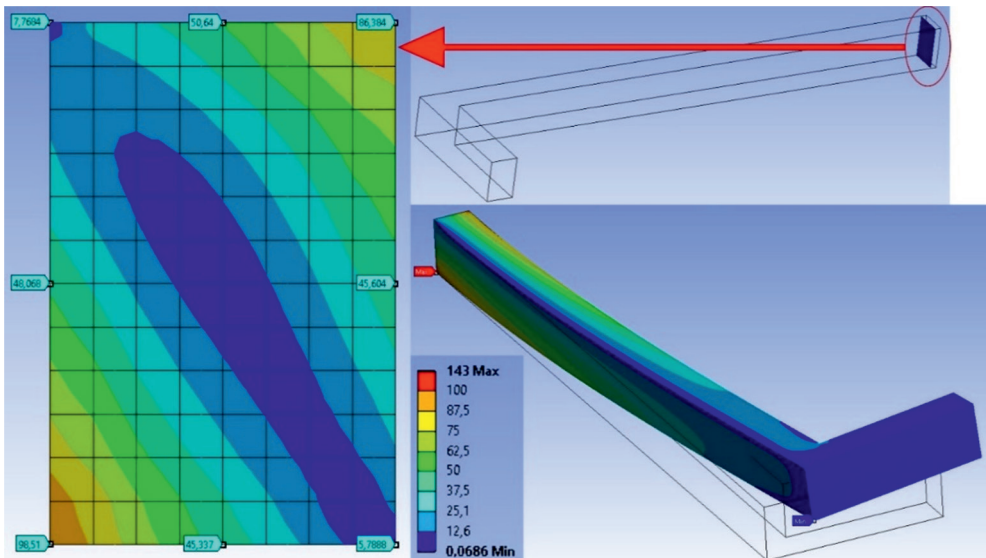
Jak wspomniano wcześniej, obliczanie naprężeń w prętach o przekrojach kołowo-symetrycznych jest dość jednoznaczne przy zastosowaniu klasycznych metod analitycznych. Metody takie zapewniają uzyskanie przyzwoitej dokładności wyników obliczeń. W przypadku prętów o przekrojach niespełniających warunków kołowej symetrii obliczenia metodami klasycznymi są trudniejsze, bardziej pracochłonne, i mniej poprawnym konstruktorom mogą sprawiać trudności.

### 6.4.1. OBLICZENIA PRĘTA O PRZEKROJU W KSZTAŁCIE PEŁNEGO PROSTOKĄTA

Obliczenia metodą elementów skończonych pręta o przekroju pełnego prostokąta wykonano dla przekroju analogicznego jak przy obliczeniach analitycznych i dla tych samych parametrów obciążenia. Dodatkowo wyniki analizowanych naprężeń przedstawione zostały szczegółowo w przekroju oddalonym o 7,5 mm od teoretycznej płaszczyzny utwardzenia, co pokazano na rys. 6.10.

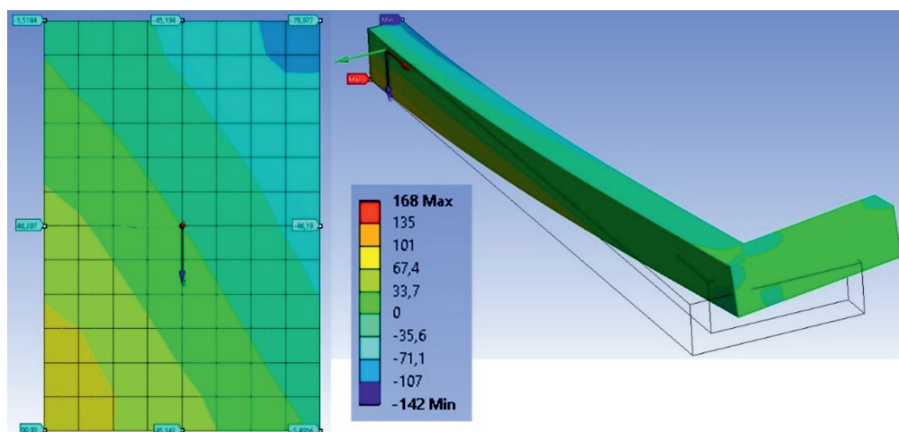


Rys. 6.9. Mapa rozkładów przemieszczeń  $u_{sum}$  [mm]

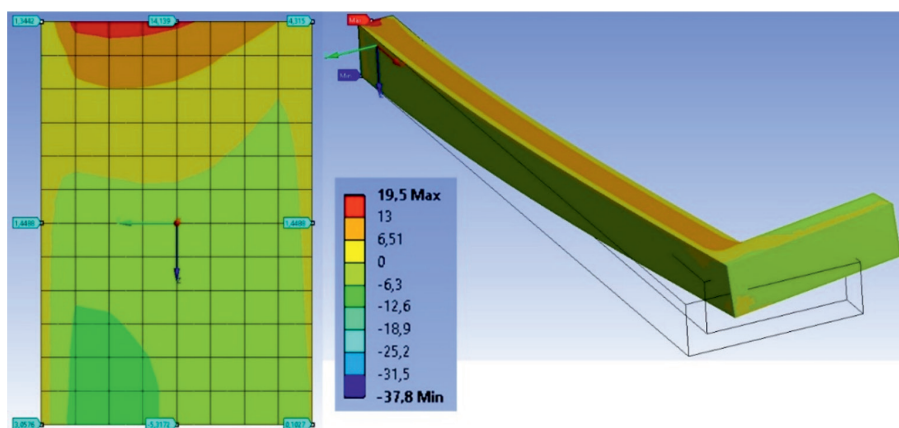


Rys. 6.10. Mapy rozkładów naprężeń zredukowanych według hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego  $\sigma_{HMH}$  [MPa]

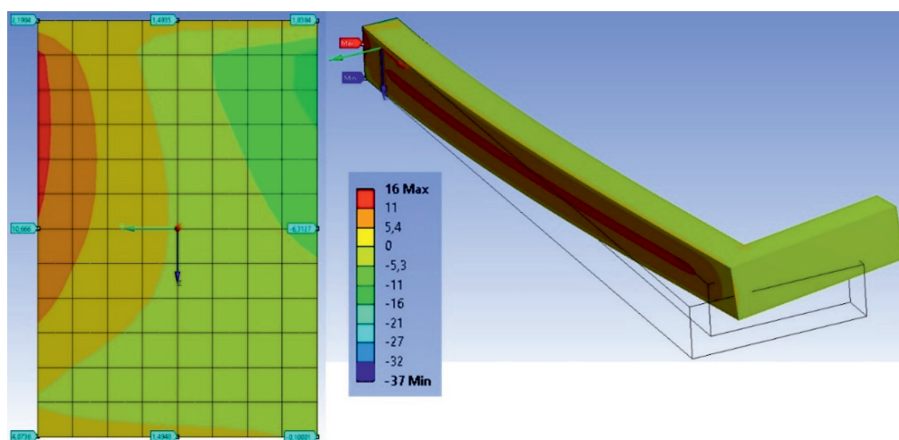




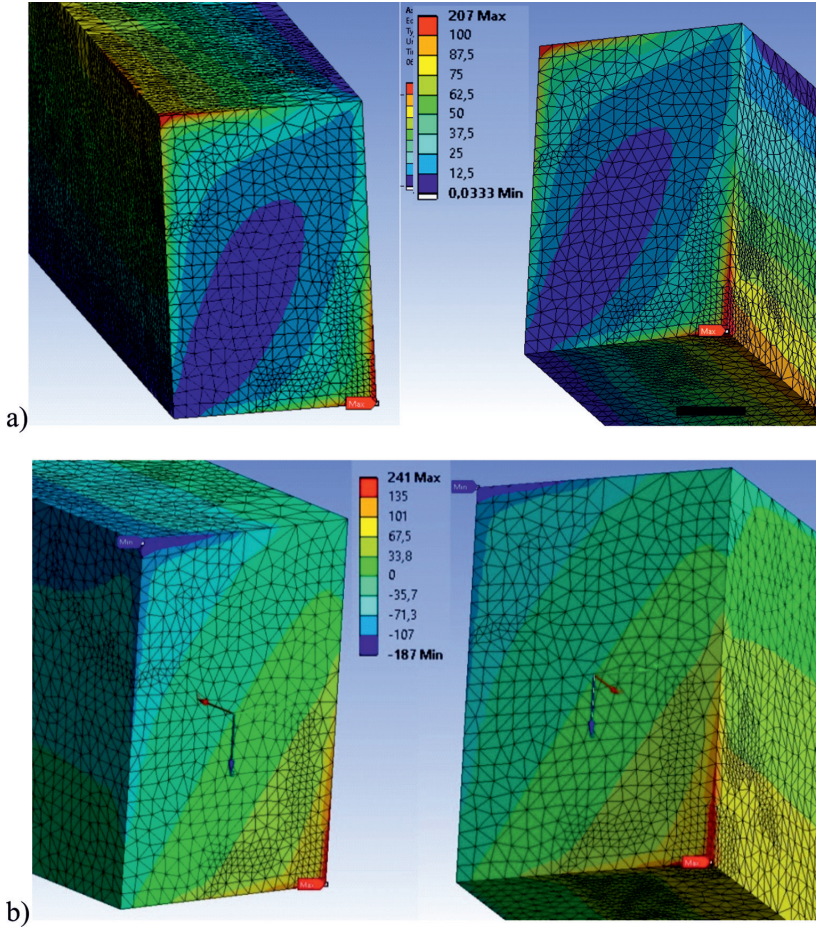
Rys. 6.11. Mapy rozkładów naprężeń  $\sigma_x$  [MPa]



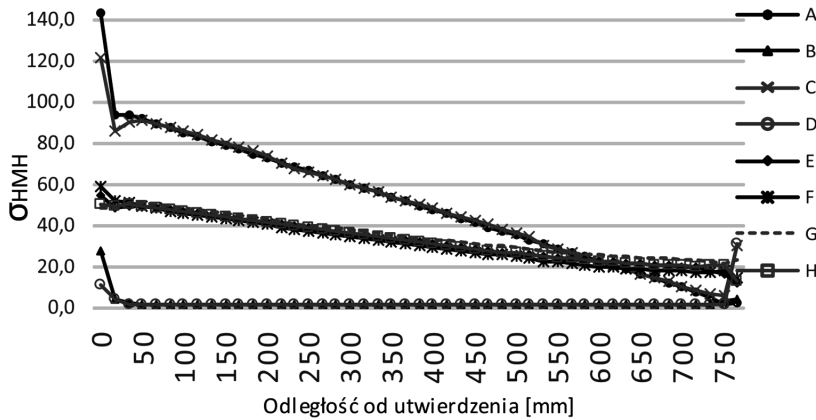
Rys. 6.12. Mapy rozkładów naprężeń stycznych  $\tau_{xy}$  [MPa]



Rys. 6.13. Mapy rozkładów naprężeń stycznych  $\tau_{xz}$  [MPa]



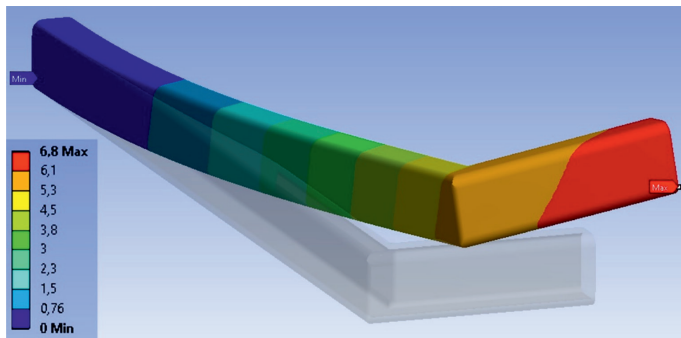
Rys. 6.14. Rozkład naprężenia zredukowanego  $\sigma_{HMH}$  (a) i  $\sigma_x$  (b) [MPa] w strefie utwardzenia pręta prostokątnego dla siatki adaptacyjnej



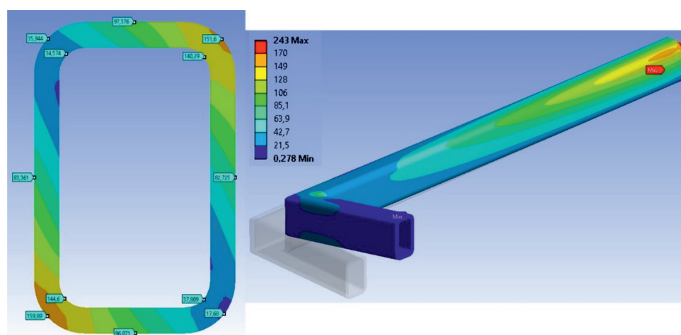
Rys. 6.15. Wykresy zmiany naprężeń zredukowanych  $\sigma_{HMH}$  na odcinku 0–100 mm od utwardzenia

Dla dokładniejszej oceny obszaru oraz stopnia koncentracji naprężeń, jak również zmniejszenia błędu rozwiązywania MES w strefie zamocowania pręta o przekroju prostokątnym wykonano obliczenia przy adaptacyjnym zagęszczaniu siatki elementów w strefie połączenia z podłożem. Widok tak przygotowanej siatki wraz z obrazem rozkładu największych w tej strefie naprężeń  $\sigma_{HMH}$  pokazano na rys. 6.14. Ekstremalna wartość naprężenia  $\sigma_{HMH}$  w stosunku do pierwotnych obliczeń MES (pokazanych wyżej), wzrosła z 143 [MPa] do 207 [MPa], tj. o 45%. Rys. 6.14 wskazuje, że strefa koncentracji naprężeń jest bardzo lokalna, ograniczona w przekrojach końcowych do przeciwnych naroży – szerokość strefy przy wierzchołku można szacować na  $\sim 1,5$  [mm]. W stosunku do wyników standardowych obliczeń stopień koncentracji wynosi 2,07; w stosunku do pierwotnych obliczeń MES jest to 1,23. Zapewne możliwe byłoby obniżenie koncentracji naprężeń przez modyfikację kształtu pręta, np. przez zaokrąglenie (zaokrąglenia) krawędzi. Pokazane na rys. 6.15 wykresy zmian wartości naprężeń w pobliżu zamocowania końcowego przekroju wskazują, że spiętrzenia naprężeń są ściśle lokalne (wynikające z odebrania wszystkich stopni swobody niektórym węzłom elementów bryłowych).

#### 6.4.2. OBLICZENIA PRĘTA O PRZEKROJU SKRZYNKOWYM I ZARYSIE PROSTOKĄTNYM

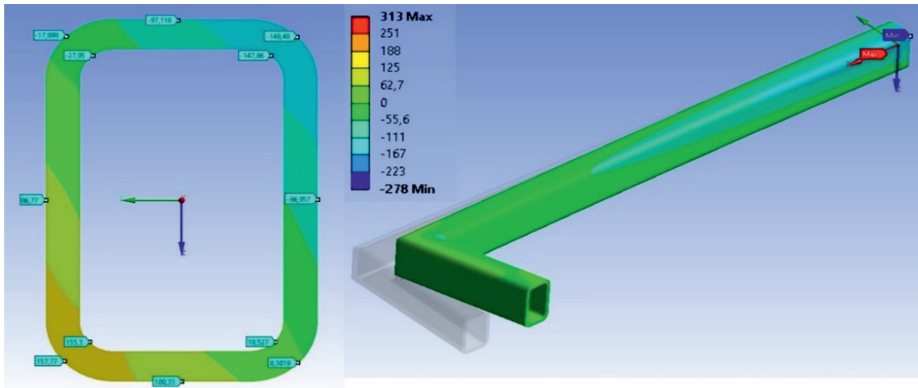


Rys. 6.16. Mapa rozkładów przemieszczeń  $u_{sum}$  [mm] pręta o przekroju skrzyńkowym

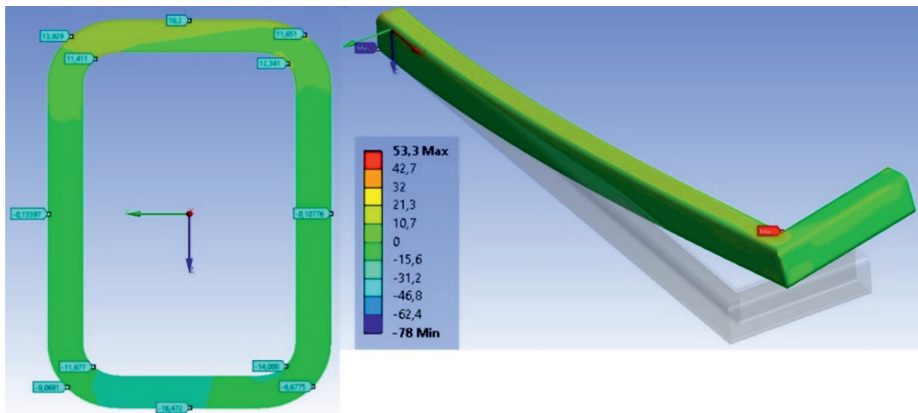


Rys. 6.17. Mapy rozkładów naprężeń zredukowanych według hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego

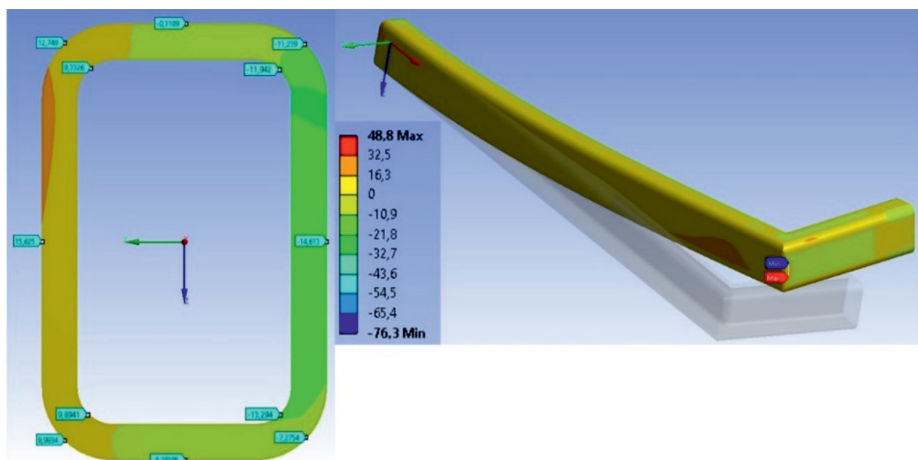
$\sigma_{HMH}$  [MPa]



Rys. 6.18. Mapy rozkładów naprężeń  $\sigma_x$  [MPa]

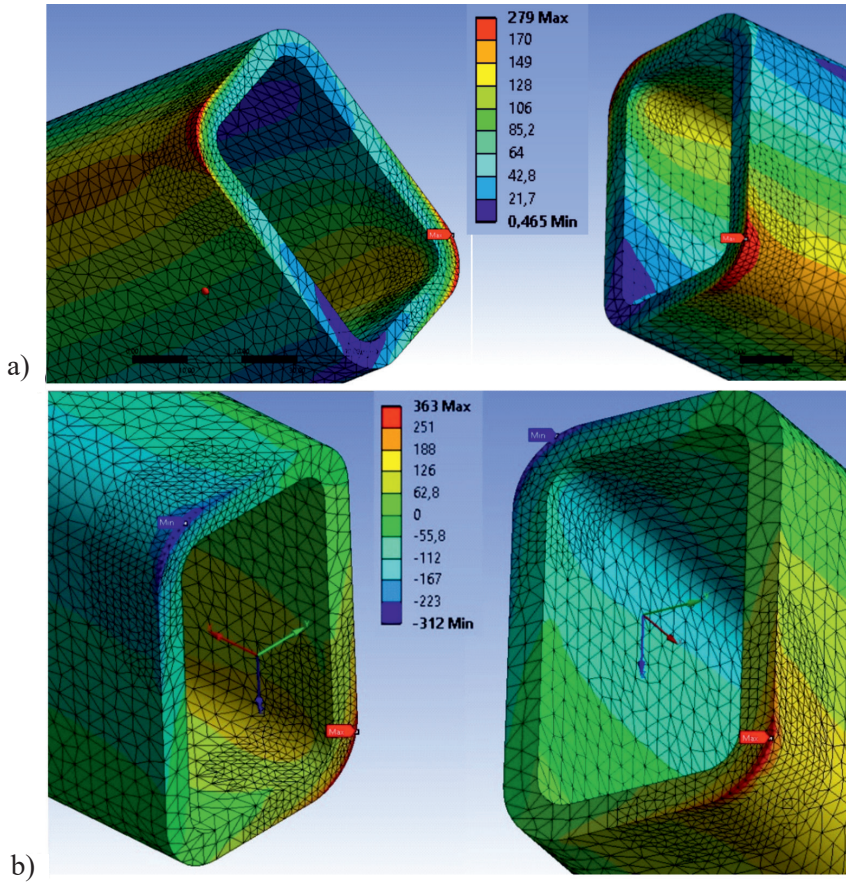


Rys. 6.19. Mapy rozkładów naprężeń stycznych  $\tau_{xy}$  [MPa]



Rys. 6.20. Mapy rozkładów naprężeń stycznych  $\tau_{xz}$  [MPa]

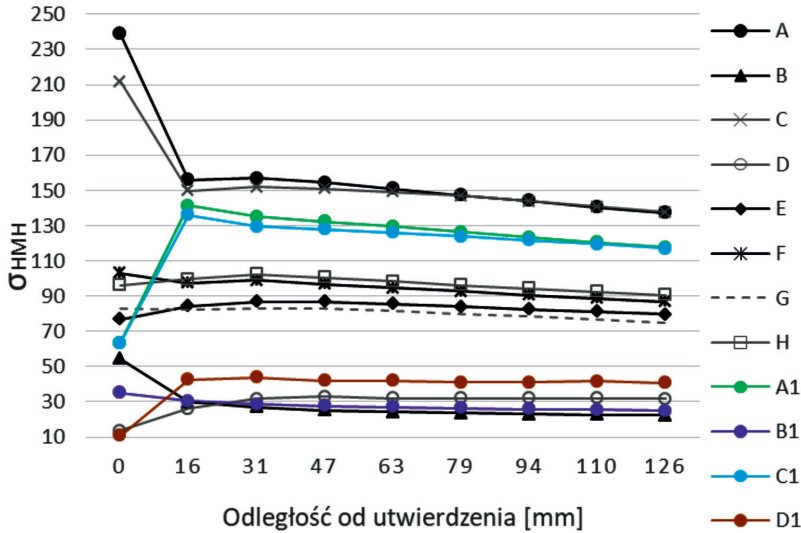




Rys. 6.21. Rozkład naprężenia zredukowanego  $\sigma_{HMH}$  (a) i  $\sigma_x$  (b) [MPa] w strefie utwierdzenia pręta o przekroju skrzyńkowym dla siatki adaptacyjnej

Podobnie jak dla pręta o przekroju prostokątnym również dla pręta o przekroju skrzyńkowym wykonano obliczenia przy wykorzystaniu zoptymalizowanej siatki elementów w strefie zamocowania pręta. Obraz nowej siatki wraz z mapą naprężeń zredukowanych  $\sigma_{HMH}$  przedstawiono na rys. 6.21. Maksymalna wartość  $\sigma_{HMH}$  dla zoptymalizowanej siatki elementów zwiększyła się z 243 [MPa] do 279 [MPa], tj. o 15%. Obie przytoczone wyżej wartości naprężeń  $\sigma_{HMH}$  są wyraźnie większe od uzyskanych ze standardowych obliczeń wytrzymałościowych. Strefy koncentracji naprężeń są bardzo lokalne i z dużym gradientem. Optymalizacja siatki elementów dla tego przekroju dała w rezultacie podwyższenie naprężeń maksymalnych, ale zmniejszyła obszar ich występowania. Pokazane na rys. 6.22 wykresy zmian wartości naprężeń w wybranych 12 punktach wskazują na dość regularne zmiany w strefie zamocowania. Tylko w dwóch wewnętrznych narożach najbardziej wyęzonych,  $A_1$  oraz  $C_1$ , występują anomalie trudne do jednoznacznej interpretacji, chociaż wartości naprężeń nie są nadmiernie duże. Są to skutki sumowania wpływu naprężeń od zginania (w dwóch

narożach ich wartości bezwzględne sumują się algebraicznie) oraz naprężeń od skręcania zwiększonych wskutek koncentracji naprężeń w narożach wewnętrznych, co potwierdzają wartości naprężeń w tych punktach pokazane w Tabeli 6.3/B.



Rys. 6.22. Wykresy zmiany naprężeń zredukowanych  $\sigma_{HMH}$  w przekroju skrzyńkowym na odcinku 0–126 mm od utwierdzenia

### 6.4.3. PODSUMOWANIE OBLICZEŃ MES

W obliczeniach naprężeń w prętach o przekrojach prostokątnych występują spiętrzenia naprężeń przy utwierdzeniu, które dość szybko zanikają (rys. 6.15 oraz rys. 6.22). Można sądzić, że składają się na to dwie przyczyny, a mianowicie: modelowanie pręta elementami bryłowymi oraz efekt wynikający z deplanacji przekroju prostokątnego (ogólnie niekołowego) poddanego skręcaniu. Zarys oszacowania skutków modelowania elementami bryłowymi w strefie zamocowania pręta do sztywnej podpory pokazano orientacyjnie w rozdziale 5 omawiającym problematykę środka ścinania. Przeprowadzone tam kalkulacje obliczeniowe wykazały, że zastosowanie w modelu obliczeniowym elementów bryłowych zwiększa formalnie stopień koncentracji naprężeń. Pokazane powyżej wyniki obliczeń MES można zatem traktować jako (co najmniej) oszacowanie górne omawianego efektu koncentracji naprężeń przy utwierdzeniu. Zjawiska koncentracji naprężeń w połączeniach tego typu, tj. elementów o istotnie różnej sztywności, stanowią przedmiot analiz przy projektowaniu węzłów konstrukcyjnych eksploatowanych przy obciążeniach cyklicznie zmiennych w czasie. Propozycje rozwiązań konstrukcyjnych można spotkać w normach (np. budowlanych) oraz w literaturze poświęconej projektowaniu konstrukcji mechanicznych pracujących w tzw. warunkach zmęczenia materiałów,

tj. obciążeń cyklicznie zmiennych w czasie (współczynniki wrażliwości materiału na działanie karbu łagodzą skutki spiętrzeń dla trwałości zmęczeniowej).

Problematyka oceny wyników obliczeń MES pręta o przekroju skrzynkowym jest znacznie bardziej złożona. W obliczeniach MES przyjęto zmodyfikowany kształt przekroju skrzynkowego, uwzględniając w dużym stopniu wymagania narzucone względami technologicznymi przy wytwarzaniu prętów (rur) o takich przekrojach, wytwarzanych przez wytłaczanie, podobnie jak wytwarza się rury bez szwu. Eliminacja spoin powoduje istotny przyrost wytrzymałości zmęczeniowej takich elementów oraz odporności na korozję – spoina jest często inicjatorem korozji. Technologia oraz ogólne reguły wytrzymałości materiałów narzucają zastosowanie zaokrągleń wszystkich naroży z niezbyt małymi promieniami. Wskutek zaokrągleń naroży zewnętrznych istotnie zmienia się (formalny) nominalny rozkład naprężeń stycznych od momentu skręcającego w stosunku do przyjmowanego w obliczeniach klasycznych, kiedy zgodnie z literaturą przyjmuje się w narożach zewnętrznych (ostrych) wartości naprężeń stycznych od skręcania jako równe **zero**. Przytoczony fakt istotnie rzutuje na wynikowe wartości naprężeń w narożach zewnętrznych zaokrąglonych. W narożach wewnętrznych metoda analityczna przewiduje znaczną koncentrację naprężeń w stosunku do obliczonych z analogii hydrodynamicznej i zapewne różnice w stosunku do obliczeń MES będą mniejsze lub nieistotne. Warto dodać, że w przypadku wyciskania prętów można oczekiwać dodatkowo umocnienia materiału powyżej wartości normowych jako efektu umocnienia w rezultacie odkształceń plastycznych przy wytłaczaniu.

W większości spośród 12 punktów charakterystycznych obserwuje się koncentrację naprężeń przy utwierdzeniu. Dodatkowo wartości ekstremalne mają charakter wyraźnie lokalny i szybko stabilizują się, przyjmując charakter zmienności sił obciążających.

Wobec znacznej zmiany kształtu przekroju skrzynkowego porównywanie wyników obliczeń analitycznych oraz MES jest znacznie trudniejsze, ale także dyskusyjne. Można oceniać, że w tym przypadku wystąpią efekty formalnego wzrostu naprężeń wskutek zastosowania w obliczeniach elementów bryłowych, analogicznie do omawianego wcześniej pręta o przekroju prostokątnym.

W analizie zagadnień wytrzymałości złożonej, w prętach o przekrojach niespełniających warunków kołowej symetrii przekroju poprzecznego, obok rozważań ogólnych wykonano obliczenia dla prostych przykładów liczbowych bez wprowadzenia oceny poziomu bezpieczeństwa analizowanych prętów. Przykłady liczbowe ułatwiają interpretację wyników obliczeń oraz wskazanie pewnych ogólnych tendencji przy korekcie wymiarów analizowanej konstrukcji.

W szczególności pokazano, że wydrążenie pręta, np. wytworzenie go przez wytłaczanie zmniejszające jego masę o 60%, przez odrzucenie słabo wykorzystywanego materiału, wewnętrznych części przekroju, spowodowało wzrost naprężenia zredukowanego o ~65%. Uzyskany wynik nie jest zaskakujący, bo przecież w przecie pozostało zaledwie 40% pierwotnego materiału. Powyższy wynik nie powinien

być mylony z wynikiem optymalizacji konstrukcji, gdyż zmiana polegała tylko na prostej operacji zmniejszenia masy. Prawdziwa optymalizacja powinna obejmować, oprócz analizy masy, wartości naprężeń zredukowanych, również analizę kosztów obejmujących koszt materiału oraz koszty zabiegów technologicznych koniecznych do zmniejszenia masy. Ogólnie można uważać, że prawdziwa optymalizacja powinna zmierzać do minimalizacji kosztów przy zachowaniu niezbędnych właściwości.

Istotnym powodem, dla którego autorzy nie podejmują dyskusji o poziomie wyęźnienia materiału, jest fakt, że wartość „naprężenia dopuszczalnego” jest nierozłącznie związana tak z materiałem, jego stanem i kosztem, jak również z analizowaną konstrukcją, w tym z jej znaczeniem, kosztami ewentualnej naprawy oraz stratami (np. straty z tytułu niewykonanej produkcji) w przypadku awarii. Korzystanie z orientacyjnych propozycji wartości naprężeń dopuszczalnych cytowanych w podręcznikach może być uzasadnione w projektach studenckich, natomiast przy prawdziwym projektowaniu może być traktowane jako punkt startu do poważnych rozważań i dyskusji. W przypadku konstrukcji specjalnych ustalenie dopuszczalnego poziomu wyęźnienia materiału wymaga konsultacji z wykonawcą głównych elementów, który (jako jedyny) może posiadać rzetelne informacje o swoim produkcie, właściwościach materiału w oferowanym wyrobie oraz możliwych wadach. Powyższe wynika z doświadczeń autorów z odlewami stalowymi o bardzo dużych wymiarach i masie (~200 [Mg]) wykonywanymi w Zakładach „ŠKODA” w Pilźnie (obecnie Czechy), posiadającymi bardzo wysokie parametry wytrzymałościowe przy równoczesnym braku wad odlewniczych. Niewątpliwie jest to problem wynikający ze stosowanej technologii odlewania i następującej później obróbki cieplnej gotowego odlewu.

## 6.5. WERYFIKACJA DOŚWIADCZALNA ANALIZ OBLICZENIOWYCH

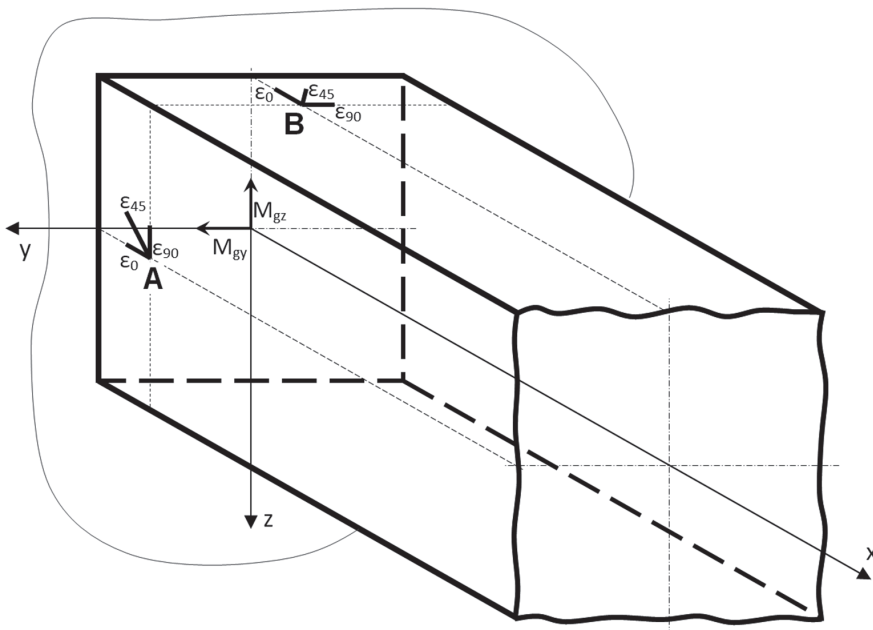
### 6.5.1. PRĘTY O PRZEKROJACH KOŁOWO-SYMETRYCZNYCH

Rozkłady naprężeń, odkształceń oraz przemieszczeń w prętach o przekrojach kołowo-symetrycznych są dość regularne, co istotnie upraszcza metodykę kontroli wyników obliczeń. Weryfikację stanu naprężenia w wybranych przekrojach pręta o przekroju kołowo-symetrycznym można przeprowadzić przez pomiar odkształceń tensometrami rezystancyjnymi. W przypadku znanej płaszczyzny zginania wystarczy nakleić rozety tensometryczne w punktach położonych na tworzących położonych w płaszczyźnie zginania, najlepiej dwie rozety na przeciwległych tworzących. Ze względu na ewentualne analizy zasadne jest naklejanie zestawów złożonych z czterech czujników. Rozety należy naklejać w przekrojach najbardziej wyęźnionych. Dla uniknięcia dość skomplikowanych analiz umożliwiających rozdzielenie skutków działania momentu skręcającego oraz zginającego zasadne jest naklejenie rozety lub krzyża tensometrycznego obróconego pod kątem 45° względem tworzącej, w punkcie na powierzchni leżącym na osi obojętnej zginania.



### 6.5.2. PRĘTY O PRZEKROJACH NIESPEŁNIAJĄCYCH WARUNKÓW KOŁOWEJ SYMETRII

Najprostszym sposobem weryfikacji doświadczalnej obliczeń pręta o przekroju niekołowym wydaje się być pomiar odkształceń na powierzchni zewnętrznej za pomocą tensometrów rezystancyjnych. Należy jednak pamiętać, że ekstremalne wartości naprężeń, jak wykazano w analizie obliczeniowej, mogą wystąpić dla przekrojów zwartych (np. prostokąt), w zewnętrznych narożach przekroju. W przypadku przekroju skrzynkowego ekstremum naprężeń, przy zginaniu ze skręcaniem, może wystąpić podobnie jak wyżej w narożach zewnętrznych lub, przy dużych wartościach  $M_s$ , w narożach wewnętrznych wskutek naprężeń od skręcania podlegających koncentracji. Pomiar odkształceń (naprężeń) w narożu zewnętrznym, konieczny w przypadku zginania złożonego (ukośnego), nie jest możliwy. Możliwy jest pomiar pośredni, przez wyznaczenie ekstremalnych odkształceń (i naprężeń) od zginania w obu prostopadłych płaszczyznach wywołanych momentami np.  $M_{gy}$  oraz  $M_{gz}$ , w przekroju lub w przekrojach, gdzie występują ekstrema momentów zginających. Pomiary odkształceń należy wykonywać w osiach symetrii ścian bocznych np. pręta o przekroju prostokątnym. Naklejanie w tych „punktach” rozet tensometrycznych pozwoli dodatkowo wyznaczyć wartości naprężeń stycznych wynikających z działania momentu skręcającego. Schemat rozmieszczenia („punktów pomiarowych”) rozet tensometrycznych pokazano na rys. 6.23. Metodykę postępowania przy opracowaniu wyników pomiarów przedstawiono w dalszych partiach niniejszego tekstu.



Rys. 6.23. Schemat rozmieszczenia rozet tensometrycznych

Pomiar odkształceń w narożach wewnętrznych przekroju skrzynkowego nie jest standardowo możliwy ze względu na brak dostępu. Wyznaczenie maksymalnych naprężeń od skręcania jest możliwe w przybliżeniu, przez wykorzystanie analogii hydrodynamicznej dla skręcania przekroju skrzynkowego oraz wartości współczynnika koncentracji naprężeń stycznych w narożu wewnętrznym przy znanym promieniu w wewnętrznym narożu. Przebieg procesu analizy wyników pomiarów i wyznaczania naprężeń decydujących o wyteżeniu materiału pręta przedstawiono poniżej.

Jak pokazano w obliczeniach MES, w przypadku utwierdzonego pręta o przekroju niekołowym, np. prostokątnym, należy oczekiwać spiętrzeń naprężeń w strefie utwierdzenia, jeżeli takie występuje. W ramach weryfikacji doświadczalnej uzasadnione jest zatem wykonanie pomiarów przynajmniej w dwóch przekrojach w różnej odległości od utwierdzenia.

Pomiar odkształceń powinien być wykonany w pobliżu przekroju, gdzie momenty zginające oraz moment skręcający osiągają wartości ekstremalne (tj. min. lub max.). Rozety należy nakleić w liniach środkowych dwu sąsiadujących ze sobą ścian belki, oznaczając czujniki symbolami pokazanymi na rys. 6.23 ( $\varepsilon_0^A, \varepsilon_{45}^A, \varepsilon_{90}^A$  oraz  $\varepsilon_0^B, \varepsilon_{45}^B, \varepsilon_{90}^B$ ). Na podstawie zmierzonych wartości odkształceń  $\varepsilon_0^A, \varepsilon_{45}^A, \varepsilon_{90}^A$  oraz  $\varepsilon_0^B, \varepsilon_{45}^B, \varepsilon_{90}^B$  można łatwo wyznaczyć odkształcenia główne, naprężenia główne oraz kąt  $\varphi_1$  między czujnikiem  $\varepsilon_0$  a kierunkiem głównym „1” według poniższych zależności (identycznych dla punktów A i B):

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{90})^2 + (2\varepsilon_{45} - \varepsilon_0 - \varepsilon_{90})^2} \quad (6.31)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_1 = \frac{2\varepsilon_{45} - \varepsilon_0 - \varepsilon_{90}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{90}} \quad (6.32)$$

Naprężenia główne wyznaczane są z zależności:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu \cdot \varepsilon_2); \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu \cdot \varepsilon_1) \quad (6.33)$$

Obliczenia wg wzorów (6.31), (6.32), (6.33) należy wykonać dla punktów A oraz B i wyznaczyć kąty  $\varphi_1^A$  i  $\varphi_1^B$  z zależności (6.32).

Obliczone z wzorów (6.33) naprężenia główne pozwalają na wyliczenie naprężeń zredukowanych np. jako:

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad (6.34)$$

Ze względu na ocenę bezpieczeństwa konstrukcji wyznaczenie wartości maksymalnych naprężeń zredukowanych z (6.34) jest formalnie wystarczające. Dla pełniejszej oceny poprawności obliczeń uzasadnione jest jednak wyznaczenie naprężeń od zginania momentami oraz ekstremalnych naprężeń stycznych od skręcania  $\tau_s$  (biorąc także pod uwagę obliczenia zmęczeniowe).

Dla uzyskania takiego rezultatu konieczna jest transformacja naprężeń z kierunków głównych (1,2) na podstawowy układ ( $x, y$  oraz  $x, z$ ) na obu ścianach pręta. Po tej operacji można będzie uzyskać wartości naprężeń  $\sigma_x = \sigma_g$  oraz  $\tau_s \cong \tau_{xy}$  lub  $\tau_s \cong \tau_{xz}$ . Należy jednak zaznaczyć, że wartości naprężeń stycznych nie będą dokładne, gdyż z naprężeniami stycznymi od skręcania współpracują naprężenia styczne od sił poprzecznych, które mają niewielkie wartości wobec naprężeń od skręcania, nie są jednak równe zero. Rozdzielenie naprężeń stycznych od ścinania oraz od skręcania jest możliwe, ale bardzo rozbudowuje układy pomiarowe i rozmiary analizy przy niewielkim wzroście dokładności.

Wzory transformacyjne naprężeń z kierunków głównych (1, 2) na układy ( $x, y$ ) oraz ( $x, z$ ) dla układu w płaszczyźnie ( $x, y$ ) podano poniżej:

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi_1 \\ \sigma_\eta &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi_1 \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\varphi_1\end{aligned}\tag{6.35}$$

(oznaczenia osi ( $\xi, \eta$ ) są umowne; w obliczeniach jedna z osi jest zawsze osią  $x$ , natomiast druga w zależności od rozpatrywanej ściany –  $y$  lub  $z$ ).

Pomiary naprężeń bądź odkształceń wewnątrz zamkniętego przekroju nie są możliwe przy założeniu sensownych kosztów takiej operacji. Określenie wartości naprężeń stycznych w narożach wewnętrznych jest możliwe pośrednio, wykorzystując analogię hydrodynamiczną, która brzmi: „naprężenia styczne w cienkościennym przekroju zamkniętym rozkładają się tak jak prędkości cieczy nielepkiej krążącej w kanale o kształcie ścianki przekroju”. Ekstremum naprężeń stycznych można dość dobrze oszacować, mając wyznaczone wcześniej wartości  $\tau_s$  w ściance oraz wartość współczynnika koncentracji  $\alpha_k$  naprężeń  $\tau_s$  w narożu wewnętrznym przekroju przy znanym promieniu zaokrąglenia i grubości ścianki (patrz wzór (6.28)).

## KOMENTARZ AUTORÓW

Huber i jego współpracownicy nie podjęli tematu; nie postawili sobie pytania, czy ścisłanie hydrostatyczne elementów ze stali z wyraźną granicą plastyczności, które nie wpływa na wartość energii odkształcenia objętościowego, nie powoduje zmiany wartości wyraźnej granicy plastyczności. Próba odpowiedzi na takie pytanie wymagałaby znacznego poszerzenia zakresu badań i zwiększenia nakładów finansowych na aparaturę oraz zatrudnienia dodatkowych pracowników. Trzeba pamiętać, że w roku 1904 Lwów, stolica Galicji, był częścią Austro-Węgier, a ta prowincja Cesarstwa nie była zagłębiem przemysłu stalowego, co tłumaczy brak sponsorów badań. Większość badań nad własnościami różnych stali w początkach XX wieku

była finansowana przez niemiecki przemysł stalowy. Odkrycie Hubera dało podstawę ważnej hipotezie wyężeniowej, chociaż przy odpowiedniej kontynuacji eksperymentów, być może, mogło przyczynić się do istotnego postępu w technologii.

Bardzo podobnymi przykładami ciekawych rezultatów badań naukowych, które również w chwili ich uzyskania nie znalazły kontynuatorów, są wyniki Inglisa (1913) w zakresie określenia stanu naprężenia w strefie „końca szczeliny”, a następnie, kilkanaście lat później, wyniki badań Griffitha dotyczące bilansu energii tarczy ze szczeliną w procesie wzrostu wymiaru tej szczeliny.

Rezultaty Inglisa (i kilku innych badaczy) oraz Griffitha przyczyniły się po kilkudziesięciu latach do dynamicznego rozwoju analizy propagacji szczelin i stworzenia nowej gałęzi *mechaniki ciała stałego*, a mianowicie *mechaniki pękania*. Przytoczone wyżej przykłady odkryć w zakresie nauk ściśle podstawowych, które stały się załącznikiem nowych dyscyplin, dowodzą znaczenia tzw. Nauk Podstawowych przyspieszających rozwój nauki, a także technologii często dopiero po pewnym czasie.

Rozwój konstrukcji samolotów (w szczególności konstrukcja samolotu Concorde) oraz samolotów bojowych (w tym samym czasie) stworzyły zapotrzebowanie na lekkie konstrukcje podwozia wraz z kołami o bardzo dużej wytrzymałości, co sugerowało wykonanie ich ze stopu, w którym podstawowym składnikiem byłoby aluminium. Nieco później podobne wymagania zgłosili konstruktorzy broni pancernej, którzy chcieli wyposażenia nowych czołgów, tzw. „średnich”, w lekkie koła o bardzo dużej wytrzymałości, co wynikało z potrzeby obniżenia masy nieresorowanej oraz zapewnienia możliwości pływania. W tym przypadku, podobnie jak w lotnictwie, wskazanym materiałem podstawowym było aluminium ze względu na ciężar właściwy oraz odporność na korozję.

Pozostawał problem, jak „nauczyć” elementy „aluminium” (dokładny skład chemiczny stosowanych stopów nie jest autorom „notatki” znany) odporności na bardzo duże obciążenia występujące w elementach podwozia projektowanego „super samolotu”, a także w kołach czołgów o dużej masie (>40 ton), poruszających się w nierównym terenie ze znacznymi prędkościami.

Specjaliści znaleźli rozwiązanie tego złożonego zadania technologicznego. Próby wskazały, że uzyskanie wymaganej wytrzymałości wspomnianych wcześniej elementów podwozia samolotów (Concorde), a nieco później czołgów jest możliwe na drodze wielokrotnego przekuwania oraz obróbki końcowej w formie „kucia matrycowego”, quasi-statycznego, na dużych prasach hydraulicznych. Dla podwozi samolotów specjaliści francuscy określili wartość niezbędną nacisku prasy na 650 [MN] (dawniej 65 000 T). Odpowiednia prasa została zmontowana we Francji, natomiast elementy główne tej konstrukcji wykonano na Uralu w Kramatorskim Kombinacie – wówczas ZSRR (mimo „zimnej wojny”). Operacja kucia matrycowego wywołuje w kuty produkcie hydrostatyczny stan naprężenia – hydrostatyczne ściskanie.

Badania specjalistów od uzbrojenia wykazały, że dla wytwarzania kół czołgowych wystarczą prasy o naciskach powyżej 200 [MN] i kilka takich oraz większych obiektów zbudowano w Europie, np. w Szwecji, Wielkiej Brytanii, Francji, Repu-

blicie Federalnej Niemiec oraz, o dziwo, Jugosławii (ówczesny Titograd – prasa 300 [MN] produkcji niemieckiej) i oczywiście w ZSRR. Polska, przy współpracy z Czechosłowacją, podjęła prace nad budową prasy 200 [MN], które zostały przerwane przed zakończeniem. Współautor niniejszej notatki (S. Bućko) uczestniczył w kierownictwie Zespołu projektującego tę prasę i przygotowującego produkcję. Niewątpliwą korzyścią pracy w realizacji tego zadania, dla inżynierów uczestniczących w projekcie, było istotne poszerzenie horyzontów w stosunku do wiedzy oferowanej w krajowej literaturze i zapoznanie się z poziomem technologii prezentowanej przez zakłady z czołówki światowej (np. „ŠKODA”). Ważną korzyścią było poznanie metod technologicznych znacznego podwyższania nośności sprężystej materiałów, które wcześniej wydawało się nieosiągalne ze względu na poziom technologiczny polskiego przemysłu.

## LITERATURA

- [1] Brzoska Z., Wytrzymałość materiałów, PWN, Warszawa 1979.
- [2] Dietrich M. (red.), Podstawy konstrukcji maszyn, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995.
- [3] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., Wytrzymałość materiałów, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
- [4] Pisarenko G.S. (red.), Soprotiwlenije materiałow, Kijów 1973.
- [5] Rusiński E., Czmochowski J., Smolnicki T., Zaawansowana metoda elementów skończonych w konstrukcjach nośnych, Oficyna Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2000.
- [6] Timoshenko S.P., Strength of materials, Part II, D. Van Nostrand, INC. Princeton, New Jersey. Ros. Soprotiwlenije Materialow, Izdatielstwo Nauka, Moskwa 1965.
- [7] Walczak J., Wytrzymałość materiałów oraz podstawy teorii sprężystości i plastyczności. Tom II. PWN, Warszawa–Kraków 1973.
- [8] Wolmir A.S., Ustojcziwost dieformirujemych sistiem. Izd. Nauka, Moskwa 1967.

## ROZDZIAŁ 7

# STAN NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W KONSTRUKCJI POWŁOKOWEJ NA PRZYKŁADZIE ZBIORNIKA CIŚNIENIOWEGO

Stefan BUĆKO, Marcin TRZEBICKI

### 7.1. WPROWADZENIE

Celem prezentowanego rozdziału jest zasygnalizowanie podstawowych zasad analizy wytrzymałościowej konstrukcji powłokowych. Zasady te różnią się istotnie od postępowania stosowanego przy obliczeniach konstrukcji prętowych.

Drugim ważnym celem jest pokazanie zjawisk często występujących w konstrukcjach powłokowych obejmujących powłoki o różnych promieniach krzywizn, co jest często powodem koncentracji naprężeń. Przeprowadzone przykładowo obliczenia MES konstrukcji zbiornika podobnego do poddawanego badaniom eksperymentalnym (pomiarom tensometrycznym wyznaczającym naprężenia na powierzchni zewnętrznej) zwracają uwagę na nietypowe efekty bardzo trudne do wykrycia również w badaniach doświadczalnych. Z powodu niepewności co do grubości ścianek powłok zbiornika poddanego badaniom porównanie wyników pomiarów z obliczeniami może mieć charakter tylko jakościowy. Ważnym elementem tekstu jest zwrócenie uwagi na zjawisko polegające na zdolności powłok do minimalizacji efektów giętych powodujących zwykle istotny wzrost wyężenia materiału.

Ocena wyników obliczeń oraz ich akceptacja jest zadaniem autorów obliczeń, którzy biorą na siebie za to odpowiedzialność. Autorzy rozdziału są przekonani, na podstawie wieloletniej praktyki obliczeniowo-projektowej konstrukcji płytowo-powłokowych, że posiadanie przynajmniej podstawowej wiedzy w zakresie teorii powłok jest bardzo potrzebne również wówczas, gdy prowadzi się obliczenia z wykorzystaniem technik komputerowych, np. Metody Elementów Skończonych.

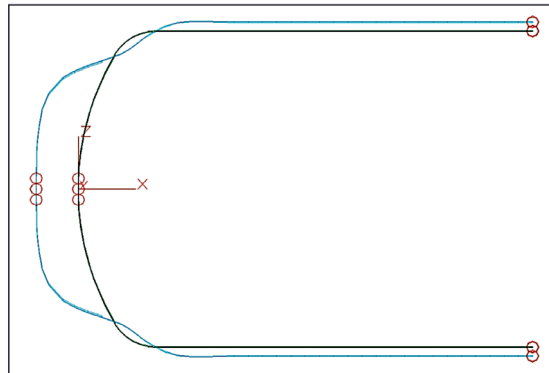
W niniejszym rozdziale pokazano, na przykładzie klasycznego zbiornika ciśnieniowego, efekty wspomniane powyżej w obliczeniach wykonanych Metodą Elementów Skończonych. Przedstawiono również zarys koncepcji obliczeń z wykorzystaniem uproszczonej metody analitycznej opartej na teorii powłok cienkich oraz zagadnieniu brzegowym powłoki walcowej kulistej. Wyniki obliczeń przedstawione w pracy są weryfikowane (jakościowo) eksperymentalnie, co zapewnia możliwość konfrontacji obliczeń i pomiarów.

## 7.2. OGÓLNE ZASADY GEOMETRYCZNE LINIOWEJ TEORII POWŁÓK CIENKICH

### 7.2.1. PODSTAWOWE POJĘCIA W TEORII POWŁÓK CIENKICH

#### Stosowane oznaczenia

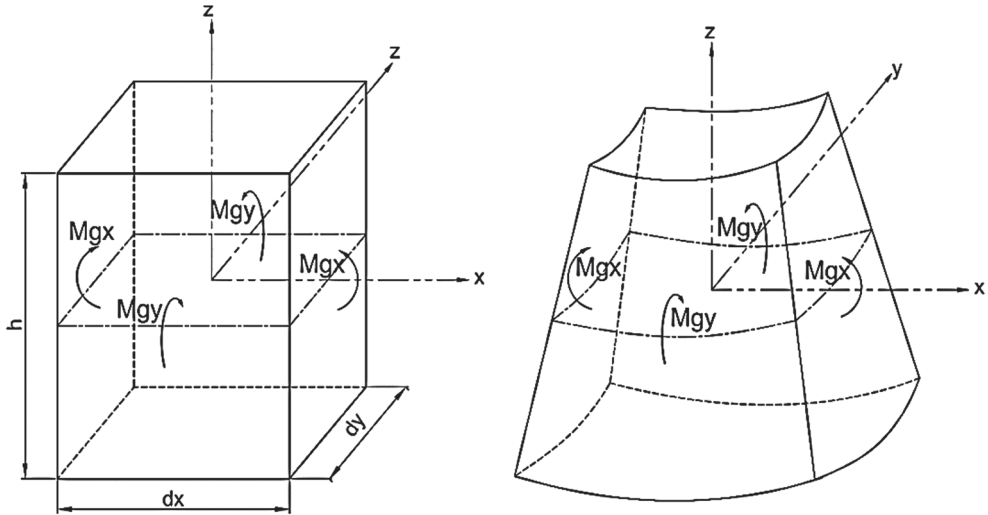
- $h$  [mm] – grubość ścianki części walcowej,
- $h_d$  [mm] – grubość ścianki dennicy,
- $D_w = 2R$  [mm] – średnica powierzchni środkowej części walcowej,
- $R_k$  [mm] – promień części kulistej dennicy,
- $r_k$  [mm] – promień części wyoblonej dennicy,
- $p$  [MPa] – ciśnienie wewnętrzne,
- $E$  [MPa] – moduł Younga,
- $\nu$  – współczynnik Poissona.



Rys. 7.1. Przykładowy obraz zbiornika w strefie dennicy odkształconego pod działaniem ciśnienia wewnętrznego

#### Założenia liniowej geometrycznej teorii powłok cienkich

- Powłoka walcowa oraz dno omawianego zbiornika są powłokami cienkościennymi, tj. stosunek grubości ścianki do promienia krzywizny jest mniejszy od 0,1.
- Przemieszczenia radialne powłoki  $w$  są małe wobec grubości ścianki  $h$  ( $w \ll h$ ).
- Naprężenia o kierunku prostopadłym do powierzchni środkowej przyjmuje się jako równe zero (w rzeczywistości są pomijalnie małe), tj. w ściance powłoki zakłada się płaski stan naprężenia.
- Obowiązuje hipoteza Kirchhoffa-Love'a: „proste prostopadłe do powierzchni środkowej powłoki po odkształceniu są prostopadłe do odkształconej powierzchni środkowej, która jest powierzchnią obojętną zginania powłoki” – zilustrowano na rys. 7.2; (odpowiednik hipotezy płaskich przekrojów dla belek).



Rys. 7.2. Ilustracja hipotezy Kirchhoffa-Love'a

### 7.2.2. SIŁY WEWNĘTRZNE I NAPRĘŻENIA W POWŁOCE WALCOWEJ

Siły wewnętrzne w powłoce są **natężeniami** sił bądź momentów na jednostkę długości przekroju (prostopadłego do pow. środkowej) wykonanego w powłoce i stąd ich nietypowe wymiary [N/mm] dla sił oraz [N×mm/mm], czyli [N], dla momentów. Analogiczne zasady obowiązują dla płyt. Obraz sił wewnętrznych w powłoce walcowej przedstawia rys. 7.3. W teorii płyt i cienkich powłok walcowych definiuje się:

- Siły wewnętrzne stanu błonowego:  $N_x$  – siła osiowa,  $N_\varphi$  – siła obwodowa,  $N_{x\varphi}$  oraz  $N_{\varphi x}$  – siły styczne; wobec symetrii osiowej zbiornika są równe zero ( $N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = 0$ ; wymiary wymienionych sił – [N/mm]).
- Siły wewnętrzne stanu giętnego:  $M_x$ ,  $M_\varphi$  – momenty zginające osiowy i obwodowy. Wobec symetrii osiowej momenty skręcające  $M_{x\varphi}$ ,  $M_{\varphi x}$  są równe zero ( $M_{x\varphi} = M_{\varphi x} = 0$ ), natomiast  $M_\varphi = \nu \cdot M_x$  (wynika z osiowej symetrii); wymiary momentów – [N].
- Siły poprzeczne  $Q_x$  oraz  $Q_\varphi$  konieczne do spełnienia warunków równowagi; [N/mm].

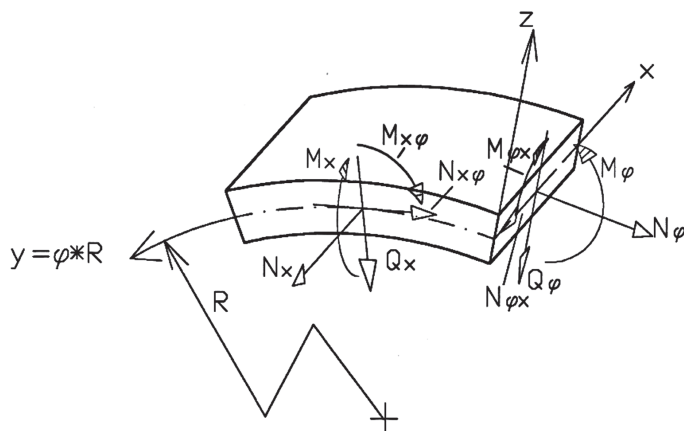
**Uwaga:** w przypadku powłok o podwójnej krzywiznie stosowany jest często układ współrzędnych geograficznych, np.:  $\Phi$  oraz  $\Theta$  zamiast  $x$  oraz  $\Phi$  lub  $y$  (jako wsp. krzywoliniowa).

W analizie stanów naprężenia i stanów odkształcenia w powłokach rozróżniamy dwa rodzaje tych stanów ze względu na charakter sił wewnętrznych oraz charakter występujących naprężeń i odkształceń:

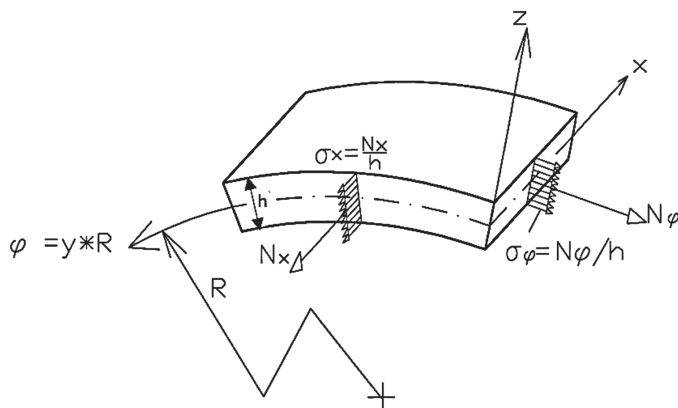
- a. Tak zwany „**stan błonowy**” charakteryzujący się tym, że w powłoce działają tylko siły styczne do powierzchni środkowej, tj.  $N_x$ ,  $N_\varphi$ , i prostopadłe do prze-



- kroju oraz siły  $N_{x\varphi}$ ,  $N_{\varphi x}$  i styczne do przekroju i powierzchni środkowej (rys. 7.3). Naprężenia stanu błonowego często oznaczane są jako:  $\sigma_x^0, \sigma_\varphi^0, \tau_{x\varphi}^0, \tau_{\varphi x}^0$ .
- b. Tak zwany „stan giętny”, kiedy występują dodatkowo momenty zginające  $M_x, M_\varphi$ , momenty skręcające  $M_{x\varphi}, M_{\varphi x}$  oraz niezbędne w tym przypadku (z powodu warunków równowagi elementu powłoki) siły poprzeczne oznaczane wcześniej jako  $Q_x, Q_\varphi$  – rys. 7.3. Naprężenia stanu giętnego oznaczane są często symbolami  $\sigma_x^g, \sigma_\varphi^g$  – rys. 7.5.
- c. Całkowite wartości naprężeń oblicza się jako sumy algebraiczne, np.  $\sigma_x^0 + \sigma_x^g; \sigma_\varphi^0 + \sigma_\varphi^g$ .



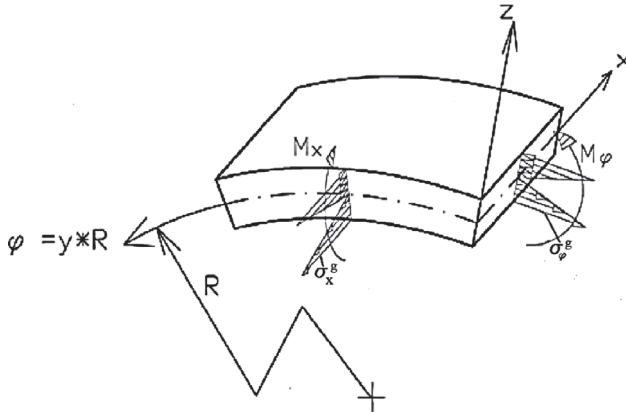
Rys. 7.3. Obraz sił wewnętrznych w powłoce



Rys. 7.4. Siły błonowe w powłoce ( $N_{x\varphi} = N_{\varphi x} = 0$ )

Zakrzywienie powierzchni powłok sprawia, że posiadają one zdolność do przenoszenia obciążeń – przy spełnieniu pewnych warunków – bez istotnego udziału zginania, tj. przez siły wewnętrzne tzw. „stanu błonowego” w całej powłoce lub w jej dominującej części. Wspomniane powyżej warunki dotyczą kształtu powierzchni

środkowej, która nie może wykazywać gwałtownych zmian krzywizny. Warunkiem stanu błonowego jest także stała lub bardzo wolno zmienna grubość powłoki. Podobny warunek dotyczy obciążeń, to znaczy, że obciążenia mogą być stałe lub wykazywać tylko łagodne zmiany.



Rys. 7.5. Momenty i naprężenia giętne w powłoce ( $M_{xy} = M_{yx} = 0$ , osiowa symetria)

Potwierdzeniem słuszności zaprezentowanej powyżej tezy są zjawiska występujące w zbiornikach kulistych o bardzo dużej pojemności lub np. w zbiornikach kropłokształtnych. Oba wymienione rodzaje konstrukcji charakteryzują się optymalnym stanem naprężenia ze względu na wytworzenie materiału powłok; przy poprawnej konstrukcji podparcia oraz obciążenia oba naprężenia główne są w takich zbiornikach sobie równe, co minimalizuje wytworzenie materiału powłoki.

W przypadkach konstrukcji z dominacją stanu błonowego pojawiają się na ogół stany giętne o charakterze lokalnym z reguły w strefach brzegowych lub lokalnie w strefie obciążeń przyłożonych w kierunku odbiegającym od kierunku stycznego do powierzchni powłoki.

Efekty opisane powyżej znajdują uzasadnienie w prawie obowiązującym w układach sprężystych, nazywanym „zasadą minimum energii odkształcenia sprężystego”: **„obciążony układ (konstrukcja) sprężysty przyjmuje taką postać (takie odkształcenie), z którą związane jest minimum całkowitej energii odkształcenia sprężystego”**. (Przykładem zastosowania jest np. tw. Menabre).

Analiza wielu zagadnień wytrzymałościowych wskazuje na dominujący wpływ energii zginania na wartość całkowitej energii odkształcenia ośrodka sprężystego. Dążąc do minimalizacji energii sprężystej, powłoka „ogranicza” zatem obszary ze stanem giętym, czyli lokalizuje strefy zginania. W literaturze można spotkać sformułowanie, że powłoki w zakresie sprężystym mają zdolność do „tłumienia zginania”, np. A.S. Wolmir [2].

W kolejnych punktach przedstawiono podstawowe zależności obowiązujące w błonowej teorii powłok cienkich dla często spotykanych powłok.

### 7.2.3. NAPRĘŻENIA BŁONOWE W POWŁOKACH

Naprężenia błonowe w powłoce walcowej:

$$\sigma_x^0 = \frac{p \cdot D_w}{4 \cdot h} \text{ [MPa]}, \quad \sigma_\varphi^0 = \frac{p \cdot D_w}{2 \cdot h} \text{ [MPa]} \quad (7.1)$$

Naprężenia błonowe w części kulistej dna lub w dnie półkulistym:

$$\sigma_\varphi^0 = \sigma_\theta^0 = \frac{p \cdot R_k}{2 \cdot h_d} \text{ [MPa]} \quad (7.2)$$

Naprężenia błonowe w powłoce elipsoidalnej na styku z częścią walcową:

$$\sigma_\theta^0 = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h_d} \text{ [MPa]}, \quad \sigma_\varphi^0 = \frac{p \cdot R}{h_d} \left( 1 - \frac{R^2}{2b^2} \right) \text{ [MPa]} \quad (7.3)$$

Naprężenia błonowe w dnie koszykowym na styku części walcowej i wyoblonej:

$$\sigma_\theta^0 = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h_d} \text{ [MPa]}; \quad \sigma_\varphi^0 = \frac{p \cdot R}{h_d} \left( 1 - \frac{R}{2 \cdot r_k} \right) \text{ [MPa]} \quad (7.4)$$

Naprężenia błonowe w dnie koszykowym na styku części kulistej i wyoblonej:

$$\sigma_\theta^0 = \frac{p \cdot R}{2 \cdot h_d} \text{ [MPa]}; \quad \sigma_\varphi^0 = \frac{p \cdot R_k}{h_d} \left( 1 - \frac{R_k}{2 \cdot r_k} \right) \text{ [MPa]} \quad (7.5)$$

**Uwaga:** w powłokach o podwójnej krzywiznie operuje się współrzędnymi „geograficznymi”.

### 7.2.4. ZWIĄZKI PRZEMIESZCZENIOWO-ODKSZTAŁCENIOWE

$$\varepsilon_\varphi = \frac{w}{R} \text{ oraz } \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_x) \text{ lub dla kuli } \varepsilon_\varphi = \frac{1}{E} (\sigma_\varphi - \nu \sigma_\theta) \quad (7.6)$$

przemieszczenia promieniowe „ $w_w$ ” brzegu powłoki walcowej z dennicami w stanie błonowym:

$$w_w = \frac{p \cdot D_w^2}{4 \cdot E \cdot h} \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right) = \frac{p \cdot D_w^2}{8 \cdot E \cdot h} (2 - \nu) = \frac{p \cdot R^2}{2 \cdot E \cdot h} (2 - \nu) \quad (7.7)$$

przemieszczenia promieniowe „ $w_k$ ” brzegu powłoki kulistej w stanie błonowym:

$$w_k = \frac{p \cdot R_k^2}{2 \cdot E \cdot h_d} (1 - \nu) \quad (7.8)$$

przemieszczenia promieniowe „ $w_e$ ” powłoki elipsoidalnej w stanie błonowym:

$$w_e = \frac{p \cdot R^2}{E \cdot h_d} \left( 1 - \frac{R^2}{2b^2} - \frac{\nu}{2} \right) \quad (7.9)$$

gdzie:

$b$  – mniejsza półoś elipsy.

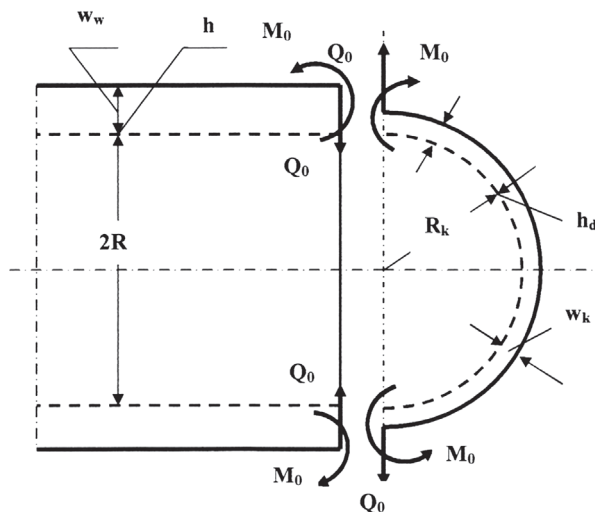
Nawet pobieżny przegląd wzorów na przemieszczenia radialne różnych powłok w stanie błonowym wskazuje, że wartości przemieszczeń powłoki walcowej i powłok dennic są prawie zawsze różne. Dla zachowania ciągłości konstrukcji (ciągłości i gładkości powierzchni środkowej – gładkość powierzchni wynika z warunku zachowania sprężystości odkształceń) konieczne jest zatem wystąpienie, na granicy części walcowej oraz dennicy sił wewnętrznych, które wymuszą ciągłość i gładkość powierzchni środkowych obu współpracujących powłok. Schemat opisanego zjawiska na przykładzie współpracy części walcowej zbiornika z dnem półkulistym przedstawiono na rysunku poniżej (rys. 7.6). W ogólnym przypadku należy oczekiwać wystąpienia sił poprzecznych  $Q_0$  oraz momentów zginających  $M_0$ , które mogą być wyznaczone z warunków ciągłości i gładkości powierzchni środkowych w miejscu styku powłok.

## 7.3. UPROSZCZONA ANALIZA SIŁ W ZŁĄCZU POWŁOK WALCOWYCH Z DENNICAMI

### 7.3.1. SIŁY WEWNĘTRZNE NIEZBĘDNE DO ZACHOWANIA CIĄGŁOŚCI KONSTRUKCJI

Zagadnienie sił wewnętrznych wynikających z konieczności spełnienia warunków ciągłości i gładkości powierzchni środkowej powłoki w strefie połączenia dwóch elementów o różnych promieniach krzywizny przedstawiono poniżej na przykładzie połączenia powłoki walcowej z powłoką kulistą.

Spełnienie warunków ciągłości oraz gładkości powierzchni środkowej w miejscu połączenia obu powłok generuje siły wewnętrzne w postaci momentu „brzegowego”  $M_0$  oraz siły poprzecznej  $Q_0$ , co pokazano na rys. 7.6. Pokazane na rysunku siły brzegowe powodują powstanie w obu częściach składowych konstrukcji (powłoki) „stanu giętnego”. Zwroty sił brzegowych na rys. 7.6 należy traktować jako orientacyjne. Stan rzeczywisty może być ustalony dopiero po rozwiązaniu układu równań: warunki ciągłości powierzchni oraz warunek gładkości powierzchni środkowej, wynikający z założenia sprężystości odkształceń, zależne są od wymiarów obu powłok oraz od ciśnienia.



Rys. 7.6. Orientacyjny rozkład sił brzegowych w złączeniu powłoki walcowej oraz kulistej

### 7.3.2. UPROSZCZONY SCHEMAT WYZNACZANIA SIŁ BRZEGOWYCH ORAZ NAPRĘŻEŃ W ZŁĄCZU POWŁOKI WALCOWEJ Z DENNICĄ

Rozwiązanie ściśle tego zagadnienia jest trudne i do celów obliczeń inżynierskich stosowano często rozwiązania przybliżone polegające na przyjęciu, że efekty giętne wymuszone przez siły brzegowe można uważać za lokalne, co pozwala na wykorzystanie rozwiązań uzyskanych dla zagadnień brzegowych teorii powłok, np. praca [1]. Aby umożliwić Czytelnikowi przynajmniej ogólny wgląd w metodykę analizy przy wykorzystaniu równań teorii powłok cienkich, poniżej przedstawiono skrót analizy tego zagadnienia brzegowego bez przytaczania szczegółów oraz tablic umożliwiających prowadzenie samodzielnych obliczeń – odpowiednie tablice i funkcje znajdzie Czytelnik w pracy [1]. Koncepcja analizy tego zagadnienia sprowadza się do wykorzystania rozwiązań zagadnienia brzegowego dla powłoki walcowej – rys. 7.6.

Równanie różniczkowe powłoki walcowej kolistej o stałej grubości  $h$  ma postać:

$$D \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + \frac{E \cdot h}{R^2} \cdot w(x) = Z \quad (7.10)$$

$Z$  – obciążenie powierzchniowe;

Podstawiając  $D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}$ ;  $\beta^4 = \frac{3 \cdot (1-\nu^2)}{R^2 \cdot h^2}$ , otrzymuje się:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4 \cdot \beta^4 \cdot w = \frac{Z}{D} \quad (7.11)$$

Analiza funkcji opisującej moment  $M_x$  (praca [1]) wykazała, że funkcja ta szybko maleje ze wzrostem  $x$ . Wobec powyższego otrzymuje się:

$$|M_x|_{x=0} = -D \cdot \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0} = M_0; |Q_x|_{x=0} = \left| \frac{dM_x}{dx} \right|_{x=0} = -D \left| \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=0} = Q_0 \quad (7.12)$$

Przy założeniu stosowania superpozycji można oddzielnie obliczyć przemieszczenia powłoki walcowej od ciśnienia (z pominięciem sił brzegowych):

$$N_x = \frac{p \cdot R}{2} \text{ oraz } N_\Theta = p \cdot R \quad (7.13)$$

oraz sił w powłoce półkulistej:

$$N_\varphi = N_\Theta = \frac{p \cdot R}{2} \quad (7.14)$$

Wydłużenie promienia powłoki walcowej z dnami od ciśnienia wynosi:

$$\Delta_1 = \frac{p \cdot R^2}{E \cdot h} \left( 1 - \frac{\nu}{2} \right) \quad (7.15a)$$

Wydłużenie promienia dna kulistego od ciśnienia wynosi:

$$\Delta_2 = \frac{p \cdot R^2}{2Eh} (1 - \nu) \quad (7.15b)$$

Jak widać, zgodnie z wcześniejszymi uwagami, wydłużenia te są różne. Konieczne są zatem siły  $Q_0$  i  $M_0$ , aby uzyskać zgodność przemieszczeń i kątów obrotu krawędzi.

Przy szacunkowym obliczeniu sił brzegowych  $Q_0$  i  $M_0$  wykorzystuje się aproksymację w postaci założenia, że przy brzegu powłoki kulistej odkształcenia brzegowe są analogiczne jak w części walcowej (oczywiście ściśle lokalnie). Dokładna analiza ugięć powłoki półkulistej jest problemem znacznie bardziej skomplikowanym i została tutaj pominięta podobnie jak w analogicznym rozdziale 15 pracy [1].

Przy równej grubości obu powłok, tj. części walcowej i półkulistej, siły  $Q_0$  powodują jednakowe obroty powierzchni styku. Oznacza to, że siła  $Q_0$  jest wystarczająca do spełnienia warunku zgodności przemieszczeń oraz gładkości strefy styku obu powłok. Należy zatem przyjąć (w tym przybliżeniu), że moment  $M_0$  jest równy zero. Wartość siły poprzecznej  $Q_0$  można wyznaczyć z warunku zgodności przemieszczeń radialnych obliczanych dla obu powłok tak jak dla brzegu powłoki walcowej:

$$|w|_{x=0} = \frac{1}{2\beta^3 D} (\beta \cdot M_0 + Q_0) = \frac{Q_0}{2 \cdot \beta^3 \cdot D} \text{ wobec } M_0 = 0 \quad (7.16)$$

$\Delta_1 - \Delta_2 = \frac{pR^2}{2Eh}$ , po podstawieniu wzorów na  $D$  oraz  $\beta$  otrzymuje się:

$$Q_0 = \frac{p}{8\beta} = \frac{p \cdot \sqrt{R \cdot h}}{8 \cdot \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \quad (7.17)$$

Moment zginający  $M_x$  określony jest wzorem:

$$M_x = -D \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{Q_0}{\beta} \cdot e^{-\beta x} \cdot \sin \beta x \quad (7.18)$$

Dodatkowa siła obwodowa  $N_\Theta$  w powłoce walcowej wywołana przez siły brzegowe wynosi:

$$N_\Theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \cdot \left( -\frac{w(x)}{R} + \nu^2 \frac{w(x)}{R} \right) = -\frac{Eh}{R} \cdot w(x) \quad (7.19)$$

Wzór (7.19) wskazuje na wystąpienie ujemnej siły obwodowej wywołanej siłami brzegowymi na złączu powłoki walcowej oraz kulistej. W realnej konstrukcji nie odpowiada to miejscu spoiny łączącej część walcową z dennicą – dennica ma odcinek powłoki walcowej (około 10 [mm]) przy złączu z powłoką walcową.

#### 7.4. OBLICZENIA NAPRĘŻEŃ I ODKSZTAŁCEŃ W ANALIZOWANYM ZBIORNIKU CIŚNIENIOWYM

Analiza stanu naprężenia w zbiornikach ciśnieniowych metodami klasycznej teorii powłok cienkich jest zagadnieniem dość skomplikowanym, wymagającym opowania wiedzy z zakresu, dość trudnej ze względu na potrzebne przygotowanie matematyczne, teorii powłok. Współcześnie, wobec łatwego dostępu do Metody Elementów Skończonych (MES), powszechnie wykonuje się obliczenia naprężeń i odkształceń w powłokach z jej wykorzystaniem. W analizie wytrzymałościowej przy projektowaniu powłok cienkich ( $h/R < 0,1$ ), często spotykanych w zbiornikach ciśnieniowych, chętnie wykorzystuje się przy modelowaniu konstrukcji dla obliczeń MES elementy płytowo-powłokowe. Elementy płytowo-powłokowe spełniają wszystkie warunki teorii powłok cienkich ( $h/R < 0,1$ ) i w analizie geometrycznie liniowej teorii powłok cienkich, tj. ( $w \ll h$ ), zapewniają uzyskanie wystarczająco dokładnych wyników przy niezbyt dużym czasie obliczeń. W zależności od wymaganej precyzji obliczeń systemy obliczeniowe MES oferują elementy płytowo-powłokowe o różnej liczbie węzłów, co umożliwia podwyższenie dokładności analizy. W analizach MES prezentowanych w dalszej części, przy analizie zbiornika, dla którego wykonano pomiary tensometryczne odkształceń, wykorzystywano elementy płytowo-powłokowe czworokątne w ich najprostszej postaci.

W analizowanym zbiorniku oznaczono (przez pomiar) grubość części walcowej  $h = 3,0$  [mm]. Nie udało się natomiast, dostępnymi autorom metodami, określić grubości ścianki dennicy. Z tego powodu oraz ze względów dydaktycznych obliczenia MES będą wykonane dla trzech wariantów konstrukcji dennicy współpracującej z powłoką walcową o grubości 3 [mm]. Wobec niepewności co do grubości blachy w dennicy trudno jednoznacznie stwierdzić, który model jest poprawny (prawdziwy) i z takiego wniosku zrezygnowano. Jako podstawowy model dla analizy konstrukcji

przyjęto model, w którym powłoka walcowa oraz dennica mają jednakową grubość równą 3,0 [mm].

W pozostałych dwóch modelach obliczeniowych następuje zmiana grubości powłoki na granicy między częścią walcową zbiornika oraz dennicą o 0,5 [mm]. Zgodnie z przepisami UDT dennica posiada odcinek powłoki walcowej jako integralną część, co wynika z potrzeby odsunięcia spoiny łączącej dennicę z częścią walcową od początku wyoblenia (powłoki toroidalnej) generującego naprężenia zginające oraz obwodowe ściskanie, a w rezultacie istotny wzrost naprężeń. Skokowa zmiana grubości powłoki modelu obliczeniowego wywołuje lokalne zaburzenia stanu naprężenia. W omawianych przypadkach zmiana grubości występuje w pewnej odległości od innych efektów wywołujących istotne zginanie, gdzie można oczekiwać jeszcze stanu naprężenia zbliżonego do stanu błonowego. Fakt ten łagodzi niekorzystne skutki wpływu zmiany grubości na stan naprężenia w strefie maksymalnego wyężenia, które występuje w dennicy, w strefie wyoblenia. Wspomniane czynniki mogą sprawić, że zmiana grubości w modelach obliczeniowych nie będzie miała istotnego wpływu na naprężenia w strefie maksymalnego wyężenia.

**Przyjęte nazwy i wymiary grubości elementów modeli obliczeniowych:**

- Model 1: grubość powłoki walcowej  $h = 3,0$  [mm]; grubość dennicy  $h_d = 3,0$  [mm];
- Model 2: grubość powłoki walcowej  $h = 3,0$  [mm]; grubość dennicy  $h_d = 3,5$  [mm];
- Model 3: grubość powłoki walcowej  $h = 3,0$  [mm]; grubość dennicy  $h_d = 2,5$  [mm].

Średnica powierzchni środkowej części walcowej zbiornika wynosi  $D = 272$  [mm]. Jako podstawowy przyjęto model obliczeniowy 1.

Obliczenia dla wszystkich modeli obliczeniowych wykonywano dla ciśnienia 2,0 [MPa] przy zastosowaniu elementów płytowo-powłokowych w wersji podstawowej.

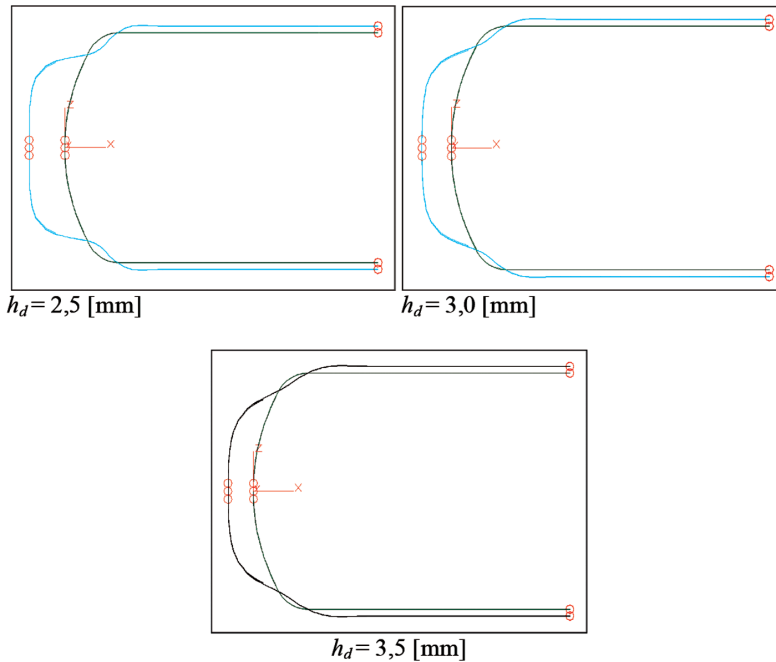
Celem prezentacji analizy wyników trzech różnych modeli obliczeniowych strefy przejścia części walcowej zbiornika w dennicę jest pokazanie wpływu zmian grubości dennicy na stan odkształcenia i stan naprężenia w strefie połączenia części walcowej zbiornika z dennicami o różnych grubościach. Warto przypomnieć, że sztywność giętna powłoki jest proporcjonalna do  $h^3$ .

Deformacje rozpatrywanych modeli (skala przemieszczeń 100:1), uzyskane w obliczeniach MES dla wspomnianych trzech modeli obliczeniowych, przedstawiono na rys. 7.7. Na rys. 7.8 i 7.9 zaprezentowano wartości obliczonych naprężeń w formie map na wyselekcjonowanych pasmach elementów wzdłuż tworzącej zbiornika. Mapy obrazują rozkłady naprężeń na tle odkształconej i nieodkształconej konstrukcji.

Wartość skali przemieszczeń sprawia, że pewne efekty związane z odkształceniami (przemieszczeniami) mogą być trudne do szybkiej oceny i akceptacji. Warto jednak podkreślić, że wymiar skali przemieszczeń może ułatwić zrozumienie mechanizmów odkształceń zbiornika. Podobnie należy interpretować duże przemieszczenie dennicy względem położenia pierwotnego, tzn. zmiany położenia punktów dennicy, mierzone od płaszczyzny symetrii zbiornika dzielącej jego długość na pół, zmienione pod wpływem obciążeń zostały przeskalowane oraz zsumowane na połowie całej długości



zbiornika. Stanowi to dodatkowe utrudnienie w interpretacji obrazów zdeformowanej konstrukcji. Zestawienie trzech zdeformowanych modeli obliczeniowych może ułatwiać analizę wpływu zmiany grubości dennicy na odkształcenia zbiornika.



Rys. 7.7. Obraz odkształconego zbiornika pod działaniem ciśnienia wewnętrznego dla różnych grubości dennicy, skala przemieszczeń (100:1)

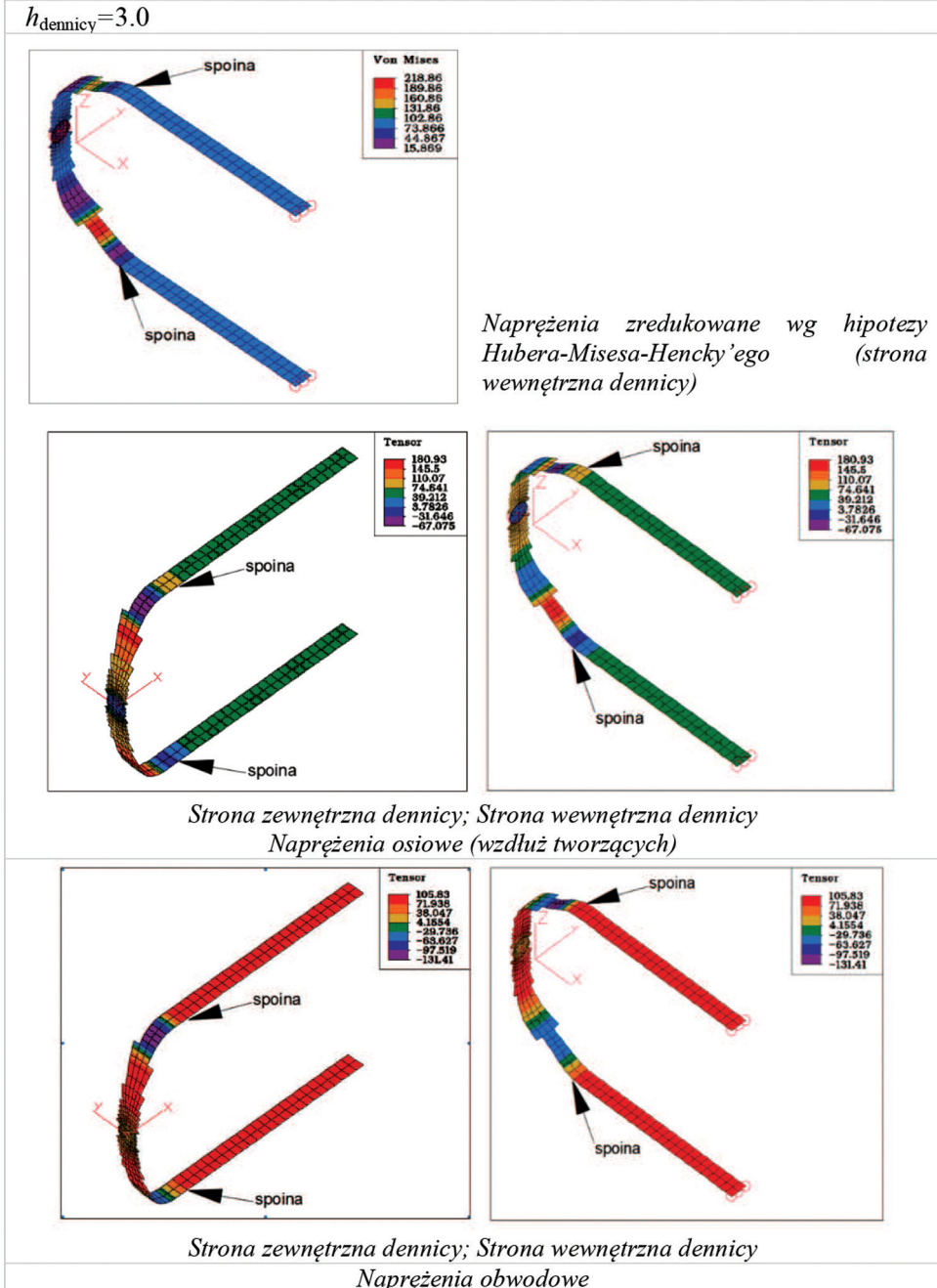
Dla ułatwienia interpretacji obrazów zdeformowanej powłoki podano obliczoną analitycznie wartość przemieszczenia „ $w$ ” w części walcowej (wzór (7.7) dla powłoki z dnami);  $w \cong 0,05$  [mm] dla  $D = 272$  [mm] i ciśnienia 2 [MPa].

Wybrane wartości naprężeń dla trzech rozpatrywanych modeli obliczeniowych zbiornika zestawiono poniżej w Tabeli 7.1.

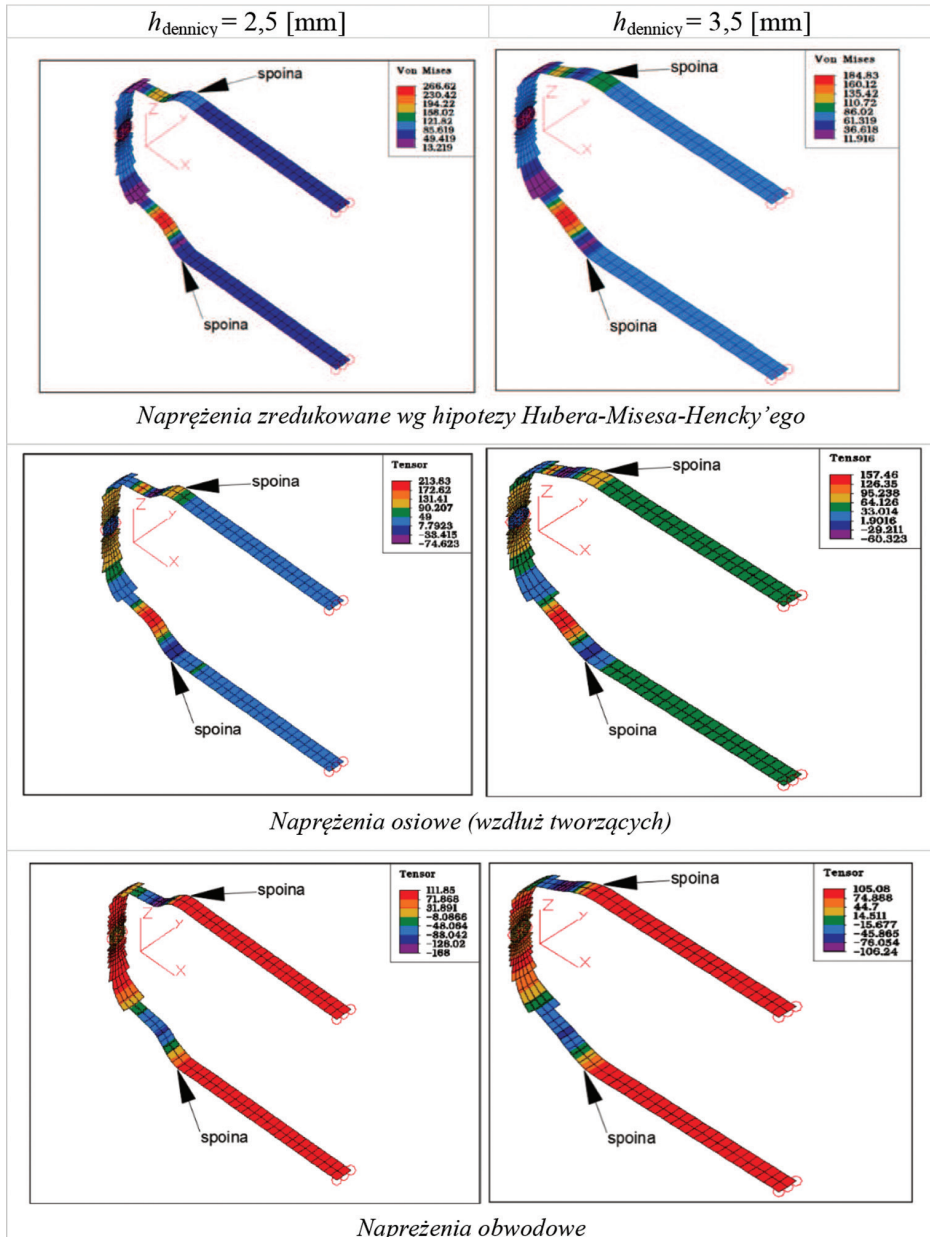
Tabela 7.1

Wybrane wartości naprężeń dla trzech modeli obliczeniowych zbiornika

	$h_D$	$\sigma_{\text{omax}}$	$\sigma_{\text{omin}}$	$\sigma_{\text{xmax}}$	$\sigma_{\text{xmin}}$	$\sigma_{\varrho\text{max}}$	$\sigma_{\varrho\text{min}}$
Model 3	2,5	266,62	13,22	213,83	74,63	111,85	168,60
Model 1	3,0	218,86	15,87	180,93	-67,08	105,83	-131,41
Model 2	3,5	184,83	11,92	157,46	-60,32	105,08	-106,24



Rys. 7.8. Zestawienie obrazów naprężeń na konstrukcjach zbiornika w stanie zdeformowanym i niezdeformowanym dla jednolitej grubości ścianek ( $h = 3,0$  mm)



Rys. 7.9. Zestawienie naprężeń zredukowanych, osiowych i obwodowych dla konstrukcji zbiornika ciśnieniowego o grubościach 2,5 mm i 3,5 mm (widok od wewnątrz)

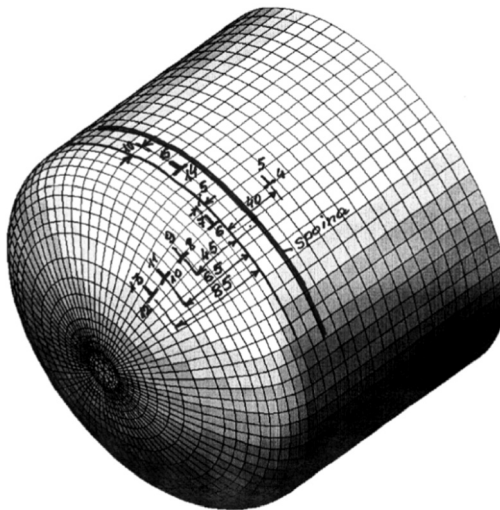
Warto zwrócić uwagę na fakt, że w modelu 1 w strefie spoiny (wskazanej strzałką) naprężenia osiągają wartości wyraźnie poniżej maksymalnych. Podobne efekty obliczeń obserwuje się także dla pozostałych dwóch modeli obliczeniowych. Po-

twierdza to sformułowany wcześniej wniosek, że zmiany grubości dennicy (modeli 2 i 3) nie powodują istotnego spiętrzenia naprężeń w spoinie.

Stwierdzone w obliczeniach MES ekstremum naprężeń  $\sigma_x \cong 181$  [MPa] (osiowych) na powierzchni wewnętrznej w strefie wyoblenia jest skutkiem sumowania się naprężeń od siły osiowej około 48 [MPa] (zbiornik z dnami) oraz od momentów zginających  $M_x$ , a także  $M_\theta$ . Analiza odkształceń tej strefy konstrukcji może uzasadniać opinię, że strefa wyoblenia jest elementem podatnym między częścią walcową i częścią kulistą dennicy, łagodzącym i lokalizującym niedopasowanie wynikające z różnicy sztywności między tymi elementami.

## 7.5. POMIARY ODKSZTAŁCEŃ W POWŁOCE TENSOMETRAMI REZYSTANCYJNYMI

Jak wspomniano wcześniej, dla pełniejszej weryfikacji stanu naprężenia w rozpatrywanym zbiorniku oraz umożliwienia porównań (choćby tylko przybliżonych) między wynikami obliczeń (MES) oraz rzeczywistym stanem naprężenia w zbiorniku wykonano tensometryczne pomiary odkształceń czujnikami rezystancyjnymi. Rozmieszczenie czujników pomiarowych pokazano na rys. 7.10. Biorąc pod uwagę osiową symetrię konstrukcji, stosowano układy dwóch czujników naklejanych w kierunkach naprężeń głównych (w kierunkach obwodowym oraz tworzącej i jej przedłużeniu na dennicy); dodatkowo na części walcowej naklejono pełną rozetę prostokątną, niezaznaczoną na rysunku (czujniki 1, 2, 3), obróconą względem kierunków głównych o około  $20^\circ$ , przeznaczoną do celów dydaktycznych. Pomiary wykonywano przy obciążeniu zbiornika ciśnieniem  $p = 2,0$  [MPa].



Rys. 7.10. Obraz rozmieszczenia czujników rezystancyjnych na badanym zbiorniku w strefie dennicy

W Tabeli 7.2 zestawiono wyniki pomiarów odkształceń, wartości naprężeń obliczonych z pomiarów odkształceń oraz dla punktów pomiarowych 4 i 5 oraz 14 i 15 obliczonych metodą analityczną.

**Tabela 7.2**

Wyniki pomiarów tensometrycznych odkształceń i obliczonych naprężeń w analizowanym zbiorniku

Ciśn. [MPa]	Nr tens.	Odczyty		$\varepsilon_i =$ $m_i^P - m_i^O$ [‰]	Odkształcenie główne $\cdot 10^5$		Kąt $\Phi$ [°]	Naprężenia zmierzone [MPa]		Naprężenia obliczone [MPa]	
		$m_i^O$	$m_i^P$		$\varepsilon_1$ ( $\varepsilon_\theta$ )	$\varepsilon_2$ ( $\varepsilon_x$ )		$\sigma_1$ ( $\sigma_\theta$ )	$\sigma_2$ ( $\sigma_x$ )	$\bar{\sigma}_1$ ( $\bar{\sigma}_\theta$ )	$\bar{\sigma}_2$ ( $\bar{\sigma}_x$ )
2,0	1	16,47	16,87	0,40	45	7	21,5	98,3	42,8	91,7	45,8
	2	16,56	16,95	0,39							
	3	16,70	16,82	0,12							
	4	15,11	15,26	0,15	41	15	0	100	62,6	101	55,4
	5	14,77	15,18	0,41							
	6	14,55	14,91	0,36	-13	36	0	-4,8	70,5		
	7	14,81	14,68	-0,13							
	8	15,17	15,43	0,26	-33	26	0	-55,4	35,4		
	9	14,85	14,52	-0,33							
	10	15,41	16,28	0,87	26	87	0	114,5	208,4		
	11	15,60	15,86	0,26							
	12	16,40	16,92	0,52	39	52	0	120	140		
	13	15,57	15,96	0,39							
	14	15,47	15,92	0,45	13	45	0	58,2	107,5	59,7	111,9
	15	15,76	15,89	0,13							

## 7.6. CHARAKTERYSTYKA WYNIKÓW POMIARÓW NAPRĘŻEŃ I PORÓWNANIE Z WYNIKAMI OBLICZEŃ MES

Jako jeden z dość istotnych elementów analizy stanu naprężenia i stanu odkształcenia w strefie połączenia części walcowej zbiornika z dennicą przyjęto wyniki pomiarów tensometrycznych odkształceń rzeczywistej konstrukcji, pamiętając przy tym, że grubość ścianki dennicy nie jest dokładnie określona.

Poniżej przedstawiono omówienie wyników pomiarów na tle wyników obliczeń wykonanych Metodą Elementów Skończonych dla modelu obliczeniowego 1, tj.  $h_w = 3,0$  [mm] oraz  $h_D = 3,0$  [mm] (patrz rys. 7.8).

W strefie wyoblenia dennicy po stronie wewnętrznej poosiowe naprężenie obliczeniowe (MES) osiąga wartość prawie 181 [MPa]. Pomiar odkształceń na powierzchni wewnętrznej nie jest możliwy. Wskazuje to na udział w kreacji naprężeń na powierzchniach powłoki także innych sił wewnętrznych oprócz momentu zginającego  $M_x$ . Niewątpliwie istotny jest udział odkształceń w kierunku osiowym, wywołanych działaniem siły osiowej działającej w zbiorniku zamkniętym dnami.

Naprężenia poosiowe w części walcowej mają wartość około 48 [MPa], co rzutuje na wartość zmierzonych odkształceń osiowych także na powierzchni zewnętrznej w rozważanej strefie (tzn. w części walcowej). Naprężenia te zwiększają również wartość odkształceń występujących na powierzchni wewnętrznej. Dodatkowy wpływ na wartość odkształceń i naprężeń w kierunkach  $x$  oraz  $\theta$  wywiera (oprócz momentu  $M_x$ ) moment zginający  $M_\theta = \nu M_x$ , co jest skutkiem osiowej symetrii. Obydwa wymienione momenty mają te same znaki. W tej strefie (tzn. w części walcowej) wpływ siły obwodowej wynikającej z działania siły  $Q_0$  jest już niewielki. Znaki naprężeń od momentów  $M_\theta$  oraz  $M_x$  na powierzchni zewnętrznej będą ujemne. Przypisanie każdej ze składowych sił wewnętrznych w rozważanej strefie, odpowiadającej wartości naprężeń, w przypadku obliczeń wykonywanych Metodą Elementów Skończonych, jest trudne ze względu na zasady obliczeń MES.

Naklejone na końcu wyoblenia na powierzchni zewnętrznej czujniki nr 8 i 9 wykazały wartości naprężeń  $\sigma_x = 35,4$  [MPa] oraz  $\sigma_\theta = -55,4$  [MPa]. Czujniki 6 i 7 naklejone na początku wyoblenia (powłoki toroidalnej) wykazały niewielkie naprężenia ujemne  $-4,8$  [MPa] w kierunku obwodowym oraz niewielki przyrost wartości naprężeń osiowych o około 12,5% w stosunku do wartości odpowiednich naprężeń wyznaczonych czujnikami 4 i 5. Wyniki obliczeń MES wykazały w tej strefie (tzn. czujników 4 i 5) ujemne wartości naprężeń obwodowych. Z powodu znacznych gradientów naprężeń i odkształceń oraz niepewności co do grubości powłoki dennicy nie można tutaj oczekiwać zgodności ilościowej wyników pomiarów oraz obliczeń.

W strefie powłoki kulistej dennicy naklejono dwa zespoły czujników, a mianowicie 10 i 11 oraz 12 i 13. Wyniki obliczeń MES w tej strefie wskazują na istotnie mniejsze gradienty naprężeń, co wynika z równomierności kształtu tej części dennicy. Wpływ kształtu jest także niezbyt wielki wobec płynności zmiany promieni krzywizn. Naprężenia obliczone w kierunku na przedłużeniu tworzącej części walcowej są znaczne, osiągając wartość prawie 181 [MPa]; naprężenia w kierunku prostopadłym (obwodowym) są znacząco mniejsze, osiągając wartość prawie 106 [MPa]. Naprężenia zmierzone czujnikami 10 i 11 (w pobliżu wyoblenia) osiągnęły wartości odpowiednio: w kierunku „tworzącej”  $\sim 208$  [MPa] i w kierunku „obwodowym” 114,5 [MPa]. Naprężenia zmierzone czujnikami 12 i 13 (w odległości 20 [mm] od poprzednich) osiągnęły wartości: w kierunku „tworzącej” 140 [MPa] i w kierunku „obwodowym” 120 [MPa]. Naprężenia obliczeniowe oraz zmierzone na części kulistej dennicy wykazały dobrą stabilność. Wartości wspomnianych naprężeń nie odbiegają od obliczeń elementarnych i uwzględniają rzeczywiste promienie krzywizn w części kulistej.

Na elementach w części walcowej zbiornika naklejono siedem czujników; w tym trzy czujniki (1, 2, 3) tworzące rozetę obróconą względem kierunków głównych, dwa czujniki (4 i 5) w odległości 20 [mm] od spoiny z dennicą oraz dwa czujniki (14 i 15) na walcowej części dennicy w odległości 10 [mm] od spoiny i takiej samej od początku wyoblenia (tj. powłoki toroidalnej). Celem rozety (1, 2, 3) jest przypomnienie zasad określania położenia kierunków i wartości naprężeń głównych. Wyniki tych pomiarów potwierdziły wyniki obliczeń uzyskanych także przy wykorzystaniu zależności dla ogólnej błonowej teorii powłok, określanymi wzorami „kotłowymi”. Wyniki pomiarów czujnikami 4, 5 w zasadzie nie odbiegają od wartości naprężeń wyznaczonych elementarnymi wzorami dla powłoki walcowej.

## 7.7. PORÓWNANIE WYNIKÓW OBLICZEŃ DLA TRZECH ANALIZOWANYCH MODELI

Dla wszystkich rozpatrywanych modeli obliczeniowych omawianego zbiornika wykonano takie same warianty obliczeń metodą elementów skończonych. Zestawy obrazów prezentujących ważniejsze wyniki obliczeń, a mianowicie mapy naprężeń zredukowanych, naprężeń osiowych oraz naprężeń obwodowych na odkształconej konstrukcji modelu z dennicą o grubości 2,5 [mm] i 3,5 [mm] przedstawiono na rys. 7.9.

W „modelu” z dennicą 2,5 [mm] występuje istotny wzrost odkształceń giętnych w strefie wyoblenia w stosunku do modelu podstawowego. Powyższe wywołuje znaczący przyrost ekstremalnego naprężenia zredukowanego o  $\sim 20\%$ . Maksimum naprężeń zredukowanych występuje w podobnej strefie powłoki na powierzchni wewnętrznej. Obserwując odkształcony obraz modelu obliczeniowego, należy pamiętać o przyjętej skali przemieszczeń (100:1); jednak deformacje wydają się nadmierne. Zarówno znaczne deformacje giętne, jak również wartość maksymalną naprężenia zredukowanego 266,6 [MPa] trudno uznać za cechy zachęcające do akceptacji takiego rozwiązania konstrukcyjnego, nie jest to jednak celem tej pracy.

W „modelu” z dennicą 3,5 [mm] odkształcenia wynikające ze zginania w strefie wyoblenia są zdecydowanie mniejsze, bez zbyt gwałtownych gradientów. Można stwierdzić, że są mniejsze niż w modelu podstawowym. Maksymalne naprężenia zredukowane są niższe o  $\sim 15\%$ , osiągając wartość 184,8 [MPa]. Ekstremalne naprężenia zredukowane występują, podobnie jak w poprzednio omawianych modelach, na powierzchni wewnętrznej zbiornika. Obwodowe naprężenia ściskające na powierzchni zewnętrznej są nieco mniejsze, co może wynikać z większej grubości ścianki dennicy.

Wybór optymalnej konstrukcji z analizowanych trzech wariantów nie jest oczywisty i wymagałby uwzględnienia kosztów materiałowych i technologicznych związanych z przeznaczeniem zbiornika.



## 7.8. WNIOSKI Z PRZEPROWADZONYCH OBLICZEŃ ORAZ POMIARÓW

- 1) Ekstremalne wartości naprężeń w rozważanym zbiorniku występują na powierzchni wewnętrznej ścianki, zatem ich bezpośredni pomiar nie jest możliwy.
- 2) Na wartości ekstremalne naprężeń decydujący wpływ mają siły wygenerowane w miejscu połączenia powłoki walcowej z wyobleniem dennicy (nie odpowiada to końcowej powierzchni czołowej dennicy).
- 3) Na powierzchni zewnętrznej zbiornika dość często mogą wystąpić naprężenia ujemne jako skutek zginania, co ma miejsce także w rozważanym zbiorniku (czujniki 6, 7 oraz 8, 9).
- 4) Zaprezentowane wyniki obliczeń pokazały możliwość przeoczenia w trakcie pomiarów ekstremalnych wartości naprężeń. W analizowanym zagadnieniu, wobec występowania ekstremum naprężeń wewnątrz zbiornika, rozmieszczenie czujników pomaga jedynie w sygnalizacji ekstremum (rozumiejącemu zasady teorii powłok).
- 5) Wystąpienie osiowych naprężeń ujemnych na powierzchni zewnętrznej sygnalizuje intensywne zginanie generujące w rezultacie duże naprężenia dodatnie na powierzchni wewnętrznej powłoki.

## LITERATURA

- [1] Timoshenko S.P., Wojnowsky-Krieger S.S., Teoria płyt i powłok, Arkady, Warszawa 1962.
- [2] Wolmir A.S., Ustojcziwost dieformirujemych sistiem. Izd. Nauka, Moskwa 1967.
- [3] Kantorowicz Z.B., Osnovy rasczota chemiczeskich maszin i aparatow. Maszgiz, Moskwa 1952.



## ROZDZIAŁ 8

### WYBRANE ZAGADNIENIA MECHANIKI PĘKANIA

Stefan BUĆKO, Henryk JODŁOWSKI, Grzegorz MILEWSKI

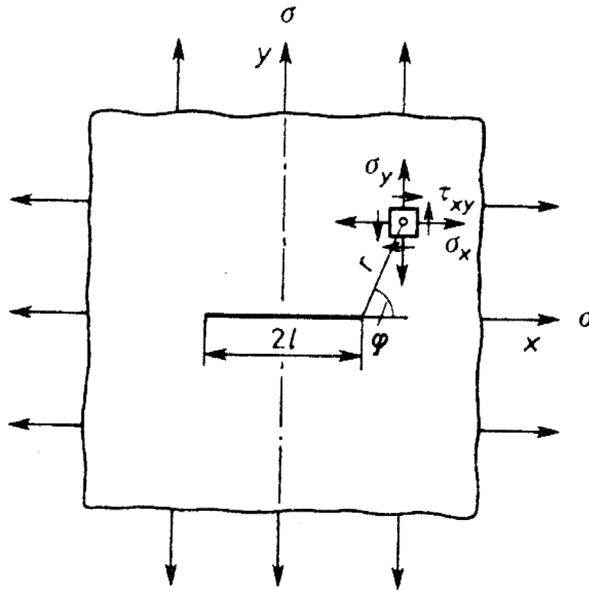
#### 8.1. WPROWADZENIE

W pierwszej połowie XX wieku nastąpił szybki rozwój technologii wytwarzania materiałów oraz technik łączenia dużych elementów stalowych przy wykorzystaniu spawania. Towarzyszył temu burzliwy rozwój metod analizy stanów naprężenia w konstrukcjach, natomiast analiza bezpieczeństwa bazowała ciągle na opisanych wcześniej schematach zniszczenia konstrukcji. Naturalnym dążeniem konstruktorów było doskonalenie konstrukcji oraz realizacja oczekiwanego przez inwestorów podwyższenia wydajności i wynikającego z tego wzrostu parametrów eksploatacji. Prowadziło to do budowy coraz większych konstrukcji pracujących przy wyższych obciążeniach, dobranych jednak według wcześniej sprawdzonych schematów analizy bezpieczeństwa konstrukcji. Historia techniki uczy, że przekraczanie sprawdzonych praktycznie ograniczeń stosowanych w projektowaniu, tylko w pewnym zazwyczaj ograniczonym zakresie, nie prowadzi do awarii (katastrof). Przykłady związane z utratą stateczności konstrukcji (wiek XVIII) oraz zniszczeniami elementów konstrukcyjnych poddanych obciążeniom cyklicznym (wiek XIX) wskazują, że zazwyczaj przy przekroczeniu sprawdzonych granic pojawia się nowy „schemat zniszczenia” niepodlegający znanym dotychczas zasadom weryfikacji bezpieczeństwa konstrukcji.

Awarie dużych konstrukcji, uważanych za w pełni bezpieczne, były zwykle bodźcami do podjęcia badań nad wyjaśnieniem mechanizmów nowych schematów zniszczenia i opracowania metod zabezpieczających przed ich występowaniem.

W drugim ćwierćwieczu XX stulecia wystąpiły spektakularne katastrofy dużych spawanych mostów oraz innych wielkogabarytowych konstrukcji mechanicznych. Jednymi z najbardziej dotkliwych katastrof były liczne przypadki przełamania się w morzu spawanych kadłubów statków transportowych typu Liberty w czasie II wojny światowej, najczęściej na północnym Atlantyku. Cechą tych katastrof była gwałtowność procesu pęknięcia kadłuba. Początkowo katastrofy przypisywano niemieckim okrętom podwodnym, jednak po przełamaniu takiego statku na redzie jednego z portów kanadyjskich podjęto intensywne badania nad wyjaśnieniem przyczyn katastrofy, która nastąpiła bez udziału nieprzyjaciela.

W pracach nad przyczynami wspomnianych katastrof sięgnięto po wyniki wcześniejszych badań „podstawowych” (jest to przykład uzasadniający celowość prowadzenia badań tzw. podstawowych, wyprzedzających bieżące potrzeby przemysłu), a mianowicie po wyniki prac Inglisa (1913) oraz Griffitha (1920). Badania Inglisa zmierzały do określenia rozkładu naprężeń wokół wierzchołka płaskiej soczewkowej szczeliny (nieciągłości w strukturze metalu–materiału o własnościach liniowo-sprężystych), gdzie promień „karbu” zmierza do zera – rys. 8.1. Uzyskane przez niego rozwiązania okazały się osobliwe, podobnie jak późniejsze wyniki innych badaczy. Oznacza to, że wartości naprężeń zmierzają do nieskończoności przy zbliżaniu się do wierzchołka szczeliny, gdzie promień krzywizny karbu zmierza do zera – wzory (8.1) i (8.2). Późniejsze rozwiązania innych autorów nie wprowadziły istotnych zmian w zakresie wzrostu naprężeń przy zmierzaniu do końca szczeliny.



Rys. 8.1. Schemat płyty z płaską środkową szczeliną obciążoną równomiernie stałą wartością naprężenia  $\sigma$

$$\sigma_x = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left( 1 - \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3}{2} \varphi \right)$$

$$\sigma_y = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{3}{2} \varphi \right)$$

(8.1)

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{3}{2} \varphi \quad \text{oraz}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2\nu a\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zx} = 0 \\ u &= \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi a}}{2G_{sp}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \left( \kappa - 1 + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \\ v &= \frac{\sigma \cdot \sqrt{\pi a}}{2G_{sp}} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \left( \kappa + 1 - 2\cos^2 \frac{\varphi}{2} \right) \\ w &= 0\end{aligned}\tag{8.2}$$

Wielkość  $\kappa$  dla płaskiego stanu naprężenia (PSN) wynosi:  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ , natomiast dla płaskiego stanu odkształcenia (PSO):  $\kappa = 3 - 4\nu$ , gdzie  $\nu$  oznacza stałą Poissona.

W tym samym okresie specjaliści pracujący nad metodyką obliczeń trwałości elementów obciążonych cyklicznie podejmowali próby znalezienia sposobów wyznaczania współczynników koncentracji naprężeń w elementach z ostrymi krawędziami. Praktyka eksploatacyjna takich elementów konstrukcyjnych dowodziła, że ich wytrzymałość zmęczeniowa jest, szczególnie przy wykonaniu z materiałów z niestatecznością materiałową, często znacząco wyższa od wynikającej z wartości współczynnika spiętrzenia naprężeń. Wprowadzano zatem różne współczynniki korekcyjne mające łagodzić drastyczny wzrost naprężeń maksymalnych w dnie karbu, jak np. współczynnik wrażliwości na działanie karbu często oznaczany  $\eta$  bądź tzw. promień graniczny  $\rho_k$  (odpowiadający wymiarom ziaren) dodawany do rzeczywistej wartości promienia karbu, aby uniknąć osobliwości oraz obniżyć obliczeniowe maksimum naprężeń przy wyznaczaniu współczynnika spiętrzenia naprężeń. Wspomniany temat również współcześnie jest przedmiotem analiz, których wyniki nie są w pełni satysfakcjonujące.

Klasyczne podejście do problemów spiętrzenia naprężeń i oceny wytrzymałości elementów z ostrymi krawędziami (np. wadami materiałowymi) nie pozwalało na poprawne oszacowanie bezpieczeństwa konstrukcji. Szczególnie dotyczyło to konstrukcji o dużych wymiarach, poddanych znacznym obciążeniom zmiennym w czasie nawet przy niezbyt dużej liczbie cykli. Osobliwości w teoretycznym rozkładzie naprężeń mogły sugerować brak możliwości budowy bezpiecznych konstrukcji. Należy jednak zaznaczyć, że konstrukcje takie były w wielu przypadkach pomyślnie eksploatowane przez długi czas.

Wprowadzono zatem, dla oceny zagrożenia bezpieczeństwa konstrukcji z wadami materiałowymi, np. w postaci szczelin lub ostrych krawędzi, inną miarę oceny – tzw. „współczynnik intensywności naprężeń” oznaczany powszechnie przez  $K$ .

Analizy stanów naprężenia wykazały bowiem, że dla szczeliny soczewkowej granica wielkości  $K$  zdefiniowanej jako:

$$K = \lim \left[ \sigma(x, 0) \cdot \sqrt{2\pi \cdot (x - a)} \right], \text{ która dla } x \rightarrow a^+ \quad (8.3)$$

jest wartością skończoną.

Okazało się, że wielkość ta może być wykorzystywana do lepszej oceny koncentracji naprężeń w przypadku ostrych korbów niż sposób klasyczny, tj. współczynnik koncentracji naprężeń.

Dla szczeliny matematycznej (rys. 8.2) współczynnik intensywności naprężeń określa zależność:

$$K = \lim \frac{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2\pi \cdot (x - a)}}{\sqrt{x^2 - a^2}}, \text{ dla } x \rightarrow a^+ \quad K = \sigma \cdot \sqrt{\pi a} \quad (8.4)$$

gdzie  $2a$  oznacza wymiar szczeliny.

Przytoczone wyżej wyniki analiz, bazujące na ocenie zjawisk charakterystycznych dla obciążeń typowych dla zmęczenia, nie przyczyniły się do wyjaśnienia awarii wielkich konstrukcji często pracujących przy niewielkiej liczbie cykli o dość zróżnicowanych amplitudach. Przypomnijmy, że analiza wyników badań zmęczenia wskazywała na mniejszy wpływ ostrych korbów niż wynikało to z kalkulacji obliczeniowych. Wydaje się, że czynnikiem, który początkowo nie został doceniony we wspomnianych awariach konstrukcji wielkogabarytowych, był wymiar tych konstrukcji. Klasyczne elementy maszyn pracujące w warunkach zmęczenia materiału miały najczęściej niezbyt duże wymiary i zwykle solidną kontrolę jakości. Jak się okazało, tymi niedocenionymi czynnikami, które mogły się przyczynić do zniszczenia konstrukcji, mogły być wady materiałowe wewnątrz elementów konstrukcji oraz bardzo duży zasób energii sprężystej zgromadzonej w wielkowymiarowej konstrukcji.

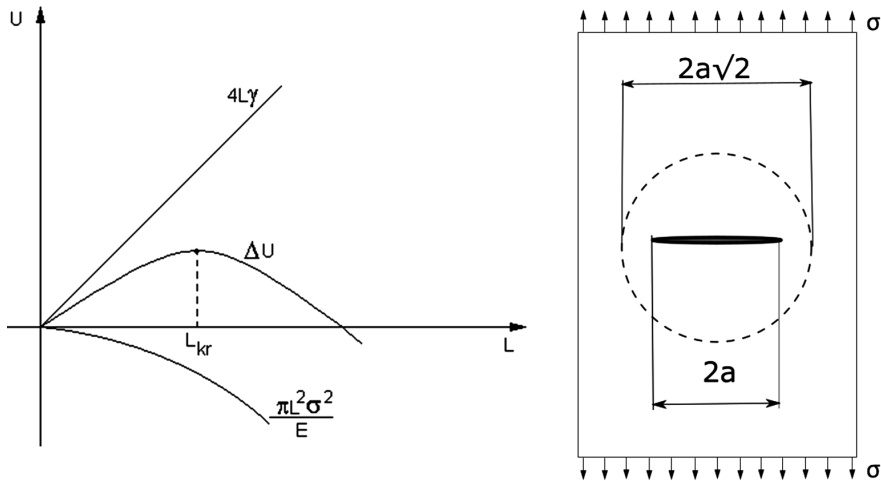
## 8.2. TEORIA GRIFFITHA

Dla wyjaśnienia mechanizmów powodujących katastroficzne zniszczenia wielkich konstrukcji, niekoniecznie obciążonych cyklicznie, podstawowe znaczenie miała koncepcja Griffitha, łącząca proces pęknięcia z bilansem energetycznym towarzyszącym rozwojowi istniejącej szczeliny. Stanowiło to element zwracający uwagę na możliwy wpływ zasobów energii sprężystej, zgromadzonych w obciążonym, dużym elemencie konstrukcyjnym bądź w dużej konstrukcji, na rozwój szczeliny. Ten czynnik we wcześniejszych analizach bezpieczeństwa konstrukcji był standardowo pomijany.

Klasyczne zagadnienie Griffitha polegało na analizie bilansu energii podlegającego zmianom wskutek powstania szczeliny „matematycznej” w nieograniczonej cienkiej tarczy o grubości  $B = 1$ , wykonanej ze szkła oraz obciążonej w nieskończoności

równomiernie rozłożonymi na brzegach naprężeniami równymi  $\sigma$ , co pokazano na rys. 8.2. Szkło jest materiałem bezpostaciowym i może być uważane za materiał idealnie kruchy. Powstanie niewielkiej szczeliny (nieciągłości) nie spowoduje zmian w rozkładzie obciążenia brzegów tarczy położonych w bardzo dużych odległościach od rozpatrywanej szczeliny i przy małych wymiarach szczeliny nie musi prowadzić do katastroficznego zniszczenia. Nie budzącym wątpliwości skutkiem pojawienia się szczeliny jest powstanie wokół szczeliny strefy odciążonej (bez naprężeń), co oznacza spadek energii sprężystej tarczy (jeżeli nie zmieniają się wartości naprężeń na brzegach tarczy).

Analiza spadku energii odkształcenia sprężystego na podstawie rozwiązań Inglisa, Sneddona i innych dowiodła, że odpowiada to energii zawartej wewnątrz (zastępczego) koła o promieniu  $a\sqrt{2}$  lub  $l\sqrt{2}$ , gdzie  $2a$  lub  $2l$  oznaczają wymiar szczeliny – rys. 8.2.



Rys. 8.2. Ilustracja zmiany energii odkształcenia sprężystego oraz energii powierzchniowej propagującej się szczeliny o długości  $l$  w podejściu Griffitha oraz charakterystyczne wymiary szczeliny

Wartość spadku energii odkształcenia sprężystego spowodowana nieciągłością wynosi zatem:

$$\Delta U_s = -\frac{\pi \cdot (a\sqrt{2})^2 \sigma^2}{2E} = -\frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sigma^2}{E} \quad (8.5)$$

Równocześnie pojawienie się szczeliny (nieciągłości) powoduje wzrost energii powierzchniowej o wartość, którą umownie można zapisać jako:

$$\Delta U_p = 4 \cdot a \cdot \gamma \text{ lub } (4 \cdot l \cdot \gamma) \quad (8.6)$$

gdzie:  $\gamma$  – jednostkowa energia (gęstość energii powierzchniowej) konieczna przy tworzeniu nowej powierzchni.

Całkowity przyrost energii związany z powstaniem szczeliny o długości  $2a$  wynosi zatem:

$$\Delta U = \Delta U_s + \Delta U_p = -\frac{\pi \cdot a^2 \cdot \sigma^2}{E} + 4 \cdot a \cdot \gamma \quad (8.7)$$

Do oceny zachowania się szczeliny istotne jest stwierdzenie, czy wzrost wymiaru szczeliny wymaga doprowadzenia energii z zewnątrz, czy też może wystąpić samonapędzający się mechanizm (dodatnie sprzężenie zwrotne) wzrostu wymiaru szczeliny bez wzrostu obciążenia tarczy. Wykres bilansu energii układu pokazanego na rys. 8.2 wskazuje, że możliwe jest wystąpienie ekstremum (maksimum) przyrostu energii  $\Delta U$ . Położenie ekstremum funkcji  $\Delta U$  wyznacza się z warunku ekstremum:

$$\frac{\partial(\Delta U)}{\partial a} = 0 \Rightarrow 4 \cdot \gamma - \frac{2\pi a \sigma^2}{E} = 0 \quad (8.8)$$

Rozwiązanie równania (8.8) przy wykorzystaniu równań (8.5) i (8.6) określają zależności:

$$\text{dla } \sigma = \sigma_{kr} \text{ jest } a = a_{kr}, \text{ a zatem: } \sigma_{kr} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a_{kr}}} \quad (8.9)$$

Przekształcając związek (8.9), otrzymuje się bardziej ogólną zależność:

$\sigma \cdot \sqrt{\pi a} = \sqrt{2E\gamma} = K$ ,  $K$  – współczynnik intensywności naprężeń zgodnie ze wzorem (8.4).

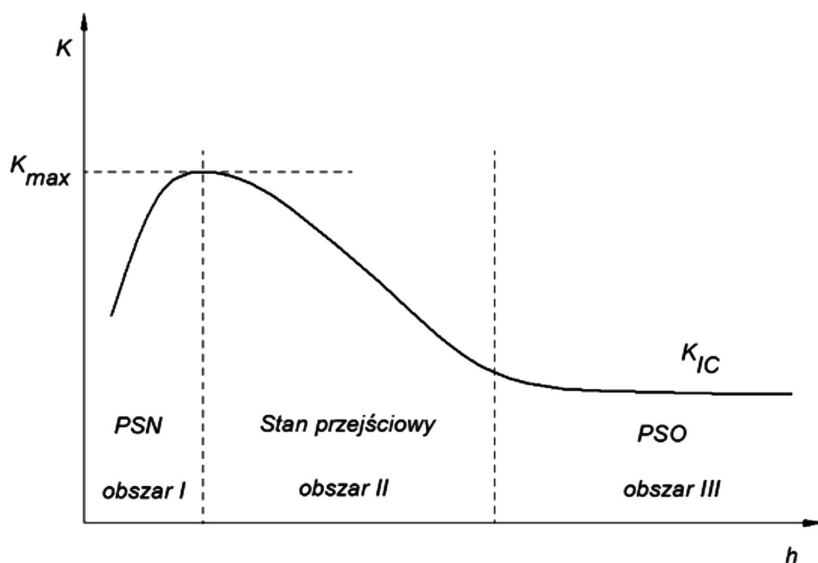
Korzystając z zależności (8.9), można zapisać związku:

dla  $a = a_{kr}$  jest  $\sigma = \sigma_{kr}$  oraz  $K = K_{kr} = K_c$  – dla płaskiego stanu naprężenia, natomiast dla płaskiego stanu odkształcenia oznacza się  $K = K_{kr} = K_{lc}$ .

Po przekroczeniu punktu maksimum przyrostu energii, ze wzrostem wymiaru szczeliny, proces staje się niestateczny, tj. szczelina powiększa się bez doprowadzania energii z zewnątrz. Oznacza to powstanie dodatniego sprzężenia zwrotnego, którego efektem jest zwykle katastroficzne pęknięcie.

**Bazując na podejściu fenomenologicznym, można więc powiedzieć, że energia sprężysta zgromadzona w konstrukcji współdziała, w tym przypadku, w procesie zniszczenia konstrukcji, co nigdy wcześniej nie było uwzględniane przy analizie możliwych schematów zniszczenia.**

Wartość krytyczna współczynnika intensywności naprężeń dla płaskiego stanu naprężenia jest zależna od wymiaru grubości elementu, co obrazuje wykres na rys. 8.3, natomiast wartość krytyczna współczynnika intensywności naprężeń  $K_{lc}$  dla płaskiego stanu odkształcenia uważana jest za stałą materiałową i bywa często nazywana „odpornością na kruche pęknięcie”.



Rys. 8.3. Wpływ grubości próbki  $h$  na wartość (krytyczną) współczynnika intensywności naprężeń  $K$

Odporność materiałów konstrukcyjnych na „kruche pęknięcie” zależy w dużym stopniu od zdolności materiału do odkształceń plastycznych. Rozkład naprężeń w strefie czoła szczeliny wskazuje, że prawie zawsze przed czołem szczeliny pojawia się strefa odkształceń plastycznych. Potwierdzają to również wyniki badań doświadczalnych. Powstawanie odkształceń plastycznych związane jest z wydatkowaniem dużej energii. Zmniejsza to prędkość procesu pęknięcia aż do stanu, gdy czoło szczeliny wyprzedzi strefę plastyczną. Występowanie strefy plastycznej przed czołem szczeliny wpływa istotnie na wzrost wartości krytycznej współczynnika intensywności naprężeń  $K_{IC}$  lub  $K_c$  w porównaniu do materiału kruchego. Wyniki badań doświadczalnych dowodzą, że wartości krytyczne współczynników intensywności naprężeń  $K_c$  oraz  $K_{IC}$  dla materiałów ciągliwych (zdolnych do odkształceń plastycznych) są wyraźnie większe niż dla materiałów kruchych lub „quasi-kruchych”. Stosowanie materiałów o dużej odporności na kruche pęknięcie jest szczególnie ważne w przypadku budowy odpowiedzialnych konstrukcji o dużych wymiarach, gromadzących dużą energię sprężystą i stwarzających duże zagrożenie w przypadku gwałtownego (katastroficznego) pęknięcia.

### 8.3. PRĘDKOŚĆ UWALNIANIA ENERGII SPRĘŻYSTEJ

Rozważania związane z teorią (hipotezą) Griffitha pokazały istotną rolę analizy bilansu energii, a szczególnie prędkości uwalniania energii sprężystej ciała w procesie rozwoju szczeliny. Koncepcja wykorzystania „współczynnika wyzwiania energii

potencjalnej” (energii odkształcenia sprężystego) została sformułowana przez Irwina i rozwinięta przez Rice’a. Obecnie wielkość ta oznaczana jest dość powszechnie przez „ $G$ ”, nazywana również „prędkością intensywności wyzwala energii potencjalnej – energii odkształcenia sprężystego”.

$$G = \frac{\partial(\Delta U_s)}{\partial F} = \frac{d(\Delta U_s)}{2 \cdot da} = \frac{\pi a \sigma^2}{E} \quad (8.10)$$

Gdy prędkość wyzwala energii odkształcenia sprężystego osiągnie wartość krytyczną:  $G = G_c$  (co odpowiada osiągnięciu zależności  $a = a_{kr}$  oraz  $\sigma = \sigma_{kr}$ ), wówczas następuje samorzutny (katastroficzny) rozwój pęknięcia (szczeliny). Zależność (8.10) odnosi się do przypadku płaskiego stanu naprężenia, natomiast w warunkach płaskiego stanu odkształcenia otrzymuje się:

$$G = (1 - \nu^2) \frac{\pi a \sigma^2}{E} \quad (8.11)$$

co wskazuje na mniejszą odporność elementu w płaskim stanie odkształcenia na kruche pęknięcie. Wynika to z faktu pojawiania się w tym stanie trzeciego naprężenia o tym samym znaku, co zgodnie z warunkiem plastyczności, np. Hubera-Misesa-Hencky’ego, przesuwają próg powstawania odkształceń plastycznych i zmniejsza wymiar strefy plastycznej przed czołem szczeliny.

W stanach sprężystych można sformułować związki między wartościami krytycznymi współczynnika intensywności naprężeń oraz krytycznymi wartościami prędkości uwalniania energii sprężystej:

$$G_c = \frac{K_c^2}{E} \quad (8.12)$$

dla płaskiego stanu naprężenia oraz

$$G_{lc} = (1 - \nu^2) \frac{K_{lc}^2}{E} \quad (8.13)$$

dla płaskiego stanu odkształcenia.

Dla przybliżenia Czytelnikowi współzależności wartości odporności na pęknięcie  $K_{lc}$  oraz wartości tradycyjnych parametrów właściwości mechanicznych, np.  $R_e$  lub  $R_{p0,2}$  w Tabeli 8.1 pokazano zestawienie wartości tych parametrów dla wybranych materiałów konstrukcyjnych.

Podane w Tabeli 8.1 wartości granicy plastyczności oraz „odporności na pęknięcie  $K_{lc}$ ” wskazują na występujące rozbieżności tych dwóch parametrów, często dużej wartości granicy plastyczności  $R_{eH}$  lub  $R_{0,2}$  towarzyszy niewielka wartość  $K_{lc}$  (np. pozycje 2 i 3 w Tabeli 8.1) stawiająca pod znakiem zapytania przydatność materiału, szczególnie na duże konstrukcje. Na wyjątkowe podkreślenie zasługują stale przeznaczone na zbiorniki ciśnieniowe oraz elementy reaktorów w elektrowniach atomowych, tzw.



stale reaktorowe. Oba wymienione wyżej rodzaje konstrukcji są zagrożone „eksplozjami” oznaczającymi efektywnie kruche (katastroficzne) pęknięcie z wyzwoleniem bardzo dużej energii, prowadzące do poważnych awarii, a nawet katastrof.

Tabela 8.1

Zestawienie wartości granicy plastyczności oraz odporności na kruche pęknięcie dla wybranych materiałów konstrukcyjnych

Lp.	Określenie materiału konstrukcyjnego	$R_e$ lub $R_{p0,2}$ [MPa]	$K_{Ic}$ [MPa $\times$ m <sup>1/2</sup> ]
1.	Stal konstrukcyjna S235 – normalizowana	235	25
2.	Stal 40CrNi po ulepszeniu cieplnym	800	65
3.	Stal na zbiorniki ciśnieniowe A533 (0,25% C, 1,5% Mn, ~0,7% Ni, ~0,6% Mo)	350	120
4.	Stal reaktorowa A533B (USA)	450	210
5.	Stal na zbiorniki ciśnieniowe A308B (USA)	465	120
6.	Stal żaroodporna (0,02% C, 18% Ni)	1700	76
7.	Stop tytanu Ti6Al4V	900	84

Jak wspomniano wcześniej, w realnych konstrukcjach najczęściej propagacji szczeliny towarzyszy strefa plastyczna, której rozmiar zależy od właściwości plastycznych materiału, od wartości naprężeń nominalnych oraz od stanu naprężenia – w płaskim stanie odkształcenia rozmiary strefy plastycznej są mniejsze niż w przypadku płaskiego stanu naprężenia. Problematyka wpływu strefy plastycznej na propagację szczeliny jest przedmiotem analiz nieliniowej mechaniki pękania, której elementy zostaną przedstawione dalej po krótkiej charakterystyce warunków bezpieczeństwa.

#### 8.4. WARUNKI BEZPIECZEŃSTWA W MECHANICE PĘKANIA

Schemat zniszczenia określany jako „kruche pęknięcie”, jak podkreślono w pkt. 8.1, nie poddaje się analizie klasycznymi metodami formułowania warunków bezpieczeństwa, w tym również z powodu przekroczenia wytrzymałości zmęczeniowej. Zniszczenie konstrukcji według omawianego schematu zniszczenia dotyczy głównie konstrukcji wielkogabarytowych, poddanych działaniu obciążeń o niewielkich częstotliwościach lub pracujących w zmiennych warunkach termicznych powodujących

przejście materiału w stan kruchości. Ze względu na konsekwencje katastroficznego zniszczenia takich konstrukcji wartości współczynników bezpieczeństwa muszą być większe od stosowanych powszechnie.

Warunek bezpieczeństwa musi uwzględniać, odpowiadającą materiałowi oraz warunkom pracy danej konstrukcji (np. temperatura pracy), wartość odporności materiału na pękanie, np.  $K_c$  lub  $K_{Ic}$ , względnie  $G_c$  lub  $G_{Ic}$  bądź inną wielkość krytyczną o analogicznej funkcji. Bardzo istotne jest uwzględnienie ewentualnych wad technologicznych oraz ostrych korbów.

Często przyjmuje się, że współczynnik bezpieczeństwa rozumiany jako stosunek odporności na pękanie  $K_{Ic}$  do obliczonej dla konstrukcji maksymalnej wartości współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$  nie powinien być mniejszy od  $\sqrt{10}$ , czyli:

$$\frac{K_{Ic}}{K_I} \geq \sqrt{10} \quad (8.14)$$

Po wykorzystaniu wcześniejszych zależności można warunek (8.14) zapisać w innej postaci:

$$\frac{\sigma_{kr}}{\sigma_{obl}} \geq \sqrt{10} \quad \text{lub} \quad \frac{a_{kr}}{a_{obl}} \geq 10 \quad (8.15)$$

Pokazany wyżej system formułowania warunku bezpieczeństwa jest charakterystyczny dla przepisów dotyczących bezpieczeństwa konstrukcji stosowanych w USA.

W roku 1976 Rabotnow zaproponował inny sposób formułowania warunku bezpieczeństwa, stosowany później w obliczeniach zbiorników reaktorowych w byłym ZSRR. Rabotnow postulował obliczenie naprężenia krytycznego ze wzoru:

$$\sigma_{kr} = \frac{K_{IR}}{\sqrt{\pi \cdot a}} \quad (8.16)$$

gdzie:  $K_{IR}$  – zalecany współczynnik intensywności naprężeń, nazywany także „względna odpornością na pękanie”. Wielkość tę wyznacza się na podstawie próby udarności Charpy V, według zależności:

$$K_{IR} = \frac{6320}{86 - t_R} [\text{MPa} \times \text{m}^{1/2}] \quad (8.17)$$

gdzie:  $t_R = t_0 - t_{50\%}$ , przy czym:  $t_0$  – temperatura eksploatacji, natomiast  $t_{50\%}$  – temperatura przejścia plastyczno-kruchoego, w której 50% przełomu próbki udarnościowej Charpy V ma charakter kruchy, określanej też jako łupliwy.

W myśl zaprezentowanej koncepcji Rabotnowa współczynnik bezpieczeństwa  $X_R$  powinien spełniać nierówność  $X_R \geq 2$ .

Powyższe nie oznacza, że współczynnik bezpieczeństwa według Rabotnowa jest wyraźnie mniejszy od poprzedniej wartości  $\sqrt{10}$ , gdyż sposoby wyznaczania warto-

ści obu tych współczynników bezpieczeństwa są odmienne i trudno porównywalne. Wykorzystywanie w warunku Rabortnowa próby udarności Charpy V przyczyniło się zapewne do jej znacznego rozpowszechnienia w badaniach materiałów.

Wielkości  $K_{IR}$  używa się często jako zamiennika klasycznej odporności na pęknięcie  $K_{Ic}$ , unikając kłopotliwego wyznaczania  $K_{Ic}$  dla materiałów o wysokiej odporności na pęknięcie. Kolejne prace badawcze pozwoliły na uzyskanie nieco innych zależności do wyznaczania  $K_{Ic}$ , również bazujących na badaniu udarności dla próbek typu Charpy V.

## 8.5. ELEMENTY NIELINIOWEJ MECHANIKI PĘKANIA

Jak wspomniano wcześniej w pkt. 8.2 oraz 8.3, propagacji pęknięcia (szczeliny) w rzeczywistych materiałach konstrukcyjnych zawsze towarzyszy odkształcenie plastyczne. Generuje to strefę plastyczną przed czołem szczeliny. Kształty oraz rozmiary stref plastycznych w elementach z materiałów zdolnych do odkształceń plastycznych wyznaczone są na drodze analiz stanów sprężysto-plastycznych metodami teorii plastyczności. Pierwsze rozwiązania dla modelu ciała idealnie sprężysto-plastycznego uzyskał Irwin, wykorzystując warunek plastyczności Hubera-Misesa-Hencky'ego. W latach późniejszych pojawiły się rozwiązania bazujące również na innych warunkach plastyczności i schematach wykresów rozciągania w początkowych fazach uplastycznienia. Wyniki analiz teoretycznych stref plastycznych przed czołem szczeliny są dyskusyjne wobec istotnej zależności od postaci przyjętego warunku plastyczności. W niewystarczającym stopniu jest zazwyczaj uwzględniany wpływ bardzo dużego gradientu naprężeń przy czole szczeliny na początek inicjacji odkształceń plastycznych oraz rzeczywisty kształt strefy plastycznej (co omówiono w pracach [1–7]). Rozpowszechnione w literaturze kształty i wymiary stref plastycznych (np. [8]) trzeba traktować jako hipotetyczne i orientacyjne. Dotyczy to również wymiarów stref plastycznych spotykanych w literaturze, które poniżej zacytowano za S. Kocańdą [9]:

$$r_{pl} = \frac{K_I^2}{2 \cdot \pi \cdot R_e^2} \text{ dla płaskiego stanu naprężenia oraz} \quad (8.18)$$

$$r_{pl} = \frac{K_I^2}{2 \cdot \pi \cdot R_e^2} (1 - 2\nu)^2 \text{ dla płaskiego stanu odkształcenia} \quad (8.19)$$

Szczególnie duże wątpliwości dotyczą wartości naprężeń inicjujących odkształcenia plastyczne w materiałach z niestatecznością materiałową, co skutkuje wprowadzeniem nowej wielkości nazywanej „naprężeniem płynięcia”, oznaczanej jako  $\sigma_p$  i definiowanej poniżej:

$$\sigma_p = \frac{1}{2}(R_e + R_m) \quad (8.20)$$

Jak wskazuje wzór (8.20), naprężenie płynięcia nie posiada sensu fizycznego i można go interpretować jako podwyższenie wartości naprężenia inicjującego pierwsze odkształcenia plastyczne względem wartości wyraźnej granicy plastyczności materiału. Podobne efekty (zwiększone w stosunku do  $R_{eH}$  wartości naprężeń inicjujących odkształcenia plastyczne), w przypadkach występowania dużych gradientów naprężeń, wykazano w badaniach eksperymentalnych wykonywanych dla materiałów z niestatecznością materiałową w pracach Zespołu Instytutu Mechaniki Stosowanej Politechniki Krakowskiej, np. prace [1–4, 7], współautorów niniejszego rozdziału.

Jednym z proponowanych (przybliżonych) sposobów uwzględniania wpływu strefy plastycznej przed czołem szczeliny na przebieg rozwoju pęknięcia jest zwiększenie rzeczywistego rozmiaru szczeliny o wartość promienia strefy plastycznej przy wyznaczaniu współczynnika intensywności naprężeń  $K_I$ :

$$K_I = \sigma \cdot \sqrt{\pi \cdot (a + r_{pl})} \quad (8.21)$$

gdzie:  $r_{pl}$  jest obliczany według zasad omówionych wcześniej.

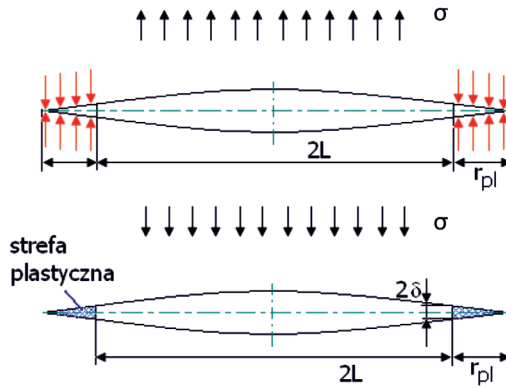
Można także spotkać propozycje, aby w obliczeniach technicznych, przy naprężeniach nominalnych nieprzekraczających  $0,4R_e$ , całkowicie pomijać wpływ strefy plastycznej na przebieg procesu pęknięcia bez obawy popełnienia błędu przekraczającego wartości dopuszczalne w obliczeniach technicznych [10, 11].

Niedoskonałości omówionych wyżej metod uwzględniania wpływu strefy plastycznej na odporność materiału na pęknięcie skłoniła do poszukiwania innych sposobów ilościowej oceny skali tego wpływu. Poniżej przedstawiono skrótowo informacje o dwóch kryteriach pęknięcia dla przypadków, gdy naprężenia nominalne osiągają wartości wyraźnie przekraczające  $0,4R_e$ .

### 8.5.1. KRYTERIUM ROZWARCIA WIERZCHOŁKOWEGO SZCELINY

Idea kryterium rozwarcia wierzchołkowego szczeliny (z ang. COD – *Crack Opening Displacement* lub CTOD – *Crack Tip Opening Displacement*) sprowadza się do przyjęcia, że o inicjacji pęknięcia materiału wykazującego zdolność do odkształceń plastycznych decyduje rozwarcie wierzchołka szczeliny wskutek odkształceń plastycznych. Przesłanką do sformułowania przez Wellsa (1963) propozycji uznania rozwarcia końca szczeliny wskutek, głównie, odkształceń plastycznych były wyniki badań doświadczalnych wykonanych przez Dugdale'a (1960). Dugdale uzyskał w swoich eksperymentach z rozciąganymi cienkimi tarczami z karbem w postaci otworu strefy plastyczne, w pierwszych fazach odkształceń plastycznych, w kształcie wydłużonego klina. Przy ocenie charakteru tych odkształceń nie wykorzystywano warunku plastyczności, lecz inne sposoby kwalifikacji odkształceń jako plastycznych. Pojawienie się takich stref plastycznych powoduje pozorne rozwieranie się (szczeliny) pęknięcia. W znacznie późniejszych bada-

niach [1, 2, 4–7] uzyskano podobne kształty stref plastycznych, przy czym inicjacja odkształceń plastycznych występowała przy naprężeniach maksymalnych przekraczających wartość  $R_{eH}$ . Ten ostatni fakt nawiązuje do wykorzystywanej w analizach mechaniki pękania wielkości, nazywanej „naprężeniem płynięcia”  $\sigma_p = 0,5(R_e + R_m)$ , co odpowiada realnie „podwyższeniu granicy plastyczności”. Można również wprowadzić pojęcie „naprężenia inicjacji” strefy plastycznej, unikając konfliktu z pojęciem granicy plastyczności, które odnosi się do przypadku jednoosiowego rozciągania. Schemat ideowy uzasadniający koncepcję COD pokazano poniżej na rys. 8.4.



Rys. 8.4. Model szczeliny oraz strefy plastycznej w podejściu Dugdale'a do pękania materiałów wykazujących zdolność do odkształceń plastycznych

Kryterium inicjacji pękania w koncepcji COD można sformułować następująco: „przekroczenie przez rozwarcie szczeliny  $\delta$  wartości krytycznej rozwarcia  $\delta_{kr}$ , oznaczanej też jako  $\delta_c$ , wskazuje na inicjację katastroficznego rozwoju pęknięcia”. Analiza problemu odkształceń plastycznych dla trójkątnej strefy plastycznej pozwala na opisanie zależności między podstawowymi parametrami widocznymi na rys. 8.4 oraz uzyskanie wzoru na  $\delta$  w postaci:

$$\delta = \frac{8 \cdot R_e \cdot a_{kr}}{\pi \cdot E} \ln \sec \left( \frac{\pi \cdot \sigma_{kr}}{2 \cdot R_e} \right) \quad (8.22)$$

Dla stanu krytycznego, tj. początku rozwoju pęknięcia przy spełnieniu warunku  $\sigma_{nom} \leq 0,4R_e$  oraz uwzględnieniu zależności (8.21), otrzymuje się:

$$\delta = \frac{8R_e a}{\pi \cdot E} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\pi \cdot \sigma}{2 \cdot R_e} \right)^2 \right] = \frac{\pi \cdot \sigma^2 \cdot a}{E \cdot R_e} = \frac{K_I^2}{E \cdot R_e} \quad (8.23)$$

Dla  $\sigma_{nom} \leq 0,4Re$  można sformułować zależności w warunkach płaskiego stanu naprężenia:

$$K_I = \sqrt{\delta \cdot E \cdot R_e} \text{ oraz} \quad (8.24)$$

$$K_{Ic} = \sqrt{\delta_{kr} \cdot E \cdot R_e} \text{ lub } K_{Ic} = \sqrt{\delta_c \cdot E \cdot R_e} \quad (8.25)$$

W warunkach płaskiego stanu odkształcenia wartość  $\delta$  można w przybliżeniu szacować ze wzoru:

$$\delta \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{K_I^2}{E \cdot R_e} \quad (8.26)$$

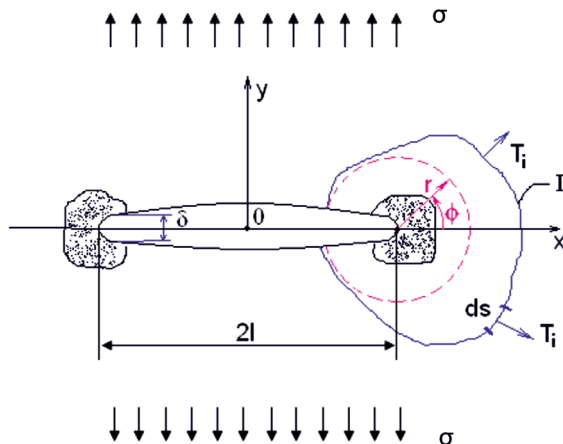
Kryterium COD traci sens, jeżeli naprężenie nominalne osiągnie wartość  $R_e$ .

### 8.5.2. ZASTOSOWANIE CAŁKI $J$ W MECHANICE PĘKANIA

W przypadkach gdy naprężenia nominalne przekraczają wartość wyraźnej granicy plastyczności, tj.  $\sigma \geq R_e$ , kryterium COD traci ważność i przydatność do analizy pęknięcia. W takich stanach przydatniejsza do oceny stanu energetycznego w strefie czoła szczeliny okazała się tzw. całka  $J$  (od imienia Jamesa Rice'a, który tę wielkość wprowadził do mechaniki pęknięcia [8]). Ogólną postać wyraża zależność:

$$J = -\frac{dU}{da} = \int_{\Gamma} \left( W_d \cdot dV - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} ds \right) \quad (8.27)$$

gdzie:  $\Gamma$  – krzywa obejmująca wierzchołek pęknięcia i strefę plastyczną o zwrocie przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (rys. 8.5),  $W_d$  – gęstość energii deformacji,  $T_i$  – wektor sił powierzchniowych na krzywej  $\Gamma$ ,  $u$  – wektor przemieszczenia,  $ds$  – wycinek łuku krzywej  $\Gamma$ .



Rys. 8.5. Schemat obciążenia szczeliny w podejściu energetycznym wg Rice'a

Analizy całki Rice'a wykazały jej przydatność w analizie ciał nieliniowo sprężystych oraz niezależność od kształtu krzywej  $\Gamma$ , o ile spełnione są warunki wymienione w opisie wzoru (8.27).

Dla krzywej  $\Gamma$  w kształcie koła o promieniu  $r$ , ze środkiem w punkcie czoła pęknięcia, w układzie współrzędnych biegunowych  $r, \varphi$  wzór (8.27) przyjmuje następującą postać:

$$J = \int_{-\pi}^{+\pi} \left[ W_d(r, \varphi) \cos \varphi - T_i(r, \varphi) \frac{\partial u}{\partial x}(r, \varphi) \right] d\varphi \quad (8.28)$$

Dla ciała liniowo sprężystego oraz płaskiego stanu naprężenia uzyskuje się zależność:

$$J = \frac{K_I^2}{E} \quad (8.29)$$

Dla ciała liniowo sprężystego oraz płaskiego stanu odkształcenia uzyskuje się z kolei zależność:

$$J = \frac{(1-\nu^2)K_I^2}{E} \quad (8.30)$$

Na podstawie wzorów (8.29) i (8.30) oraz ogólnych zasad omówionych wcześniej można sformułować wzory opisujące wartości krytyczne charakteryzujące odporność na kruche pęknięcie:

$$J_{lc} = \frac{K_{lc}^2}{E} \quad \text{dla płaskiego stanu naprężenia oraz} \quad (8.31)$$

$$J_{lc} = \frac{(1-\nu^2)K_{lc}^2}{E} \quad \text{dla płaskiego stanu odkształcenia} \quad (8.32)$$

Porównanie treści punktów 8.3, 8.5.1, 8.5.2 i 8.5.3 wskazuje, że w obszarze ważności założeń liniowej mechaniki pękania omówione w wymienionych punktach kryteria inicjacji pęknięcia są równoważne.

$$\frac{K_{lc}^2}{E} = \delta_c \cdot R_e = J_{lc} = G_{lc} \quad \text{oraz} \quad \delta_{lc} = \frac{\sigma_{kr}^2}{R_e E} \pi \cdot a_{kr} \quad (8.33)$$

Jak wspomniano wcześniej, powyższe zależności mogą być stosowane w obliczeniach technicznych nawet przy naprężeniach nominalnych przekraczających  $0,5R_e$ , kiedy nieuniknione jest wystąpienie już dość dużej strefy plastycznej przed czołem szczeliny [9]. Można również spotkać metody wyznaczania odporności na pęknięcie  $K_{lc}$  na podstawie doświadczalnego wyznaczania całki Rice'a. Taka koncepcja nie znalazła jeszcze usankcjonowania w formie normy europejskiej.

## 8.6. PODSTAWY MECHANIKI PĘKANIA W ANALIZIE ROZWOJU PĘKNIĘĆ ZMĘCZENIOWYCH

W warunkach obciążeń cyklicznie zmiennych, którym podlega większość elementów konstrukcyjnych o wymaganym poziomie niezawodności i bezpieczeństwa, jednym z najważniejszych kryteriów jest dobór materiału o cechach przeciwstawiających się rozwojowi pęknięć.

W analizie rozwoju pęknięć zmęczeniowych podstawą współcześnie stosowanych teorii i modeli rozwoju propagacji uszkodzeń była podana przez Parisa koncepcja powiązania prędkości pęknięcia z Irwinowskim współczynnikiem intensywności naprężeń  $K$  [12]:

$$\frac{da}{dN} = f(K) \quad (8.34)$$

gdzie:  $da$  – przyrost długości szczeliny/pęknięcia,  $dN$  – przyrost liczby cykli.

Koncepcja ta zweryfikowana doświadczalnie przez Parisa i współpracowników dla stopów aluminium przyjmuje zależność potęgową [13]:

$$\frac{da}{dN} = C_p \Delta K^m \quad (8.35)$$

gdzie:

$\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  oznacza zakres współczynnika intensywności naprężeń,  $C_p$  oraz  $m$  są stałymi materiałowymi wyznaczanymi doświadczalnie.

Modyfikacje tego podejścia, w ocenie rozwoju zniszczenia zmęczeniowego w elementach konstrukcyjnych pracujących w warunkach obciążeń cyklicznie zmiennych, uwzględniały również zależność ewolucji pęknięcia od takich wielkości jak: zakres całki  $J$ , zakres rozwarcia wierzchołkowego szczeliny COD czy wielkości strefy odkształcenia plastycznego [14–16].

## 8.7. DOŚWIADCZALNE WYZNACZANIE ODPORNOŚCI MATERIAŁU NA PĘKANIE

Aktualnie obowiązujące w mechanice doświadczalnej ciała stałego metody wyznaczania odporności na pękanie oparte są na znormalizowanych zaleceniach Amerykańskiego Stowarzyszenia Badań i Materiałów (*American Society for Testing and Materials*): ASTM E1820–20b ‘Standard Test Method for Measurement of Fracture Toughness’ oraz ASTM E399–20 ‘Standard Test Method for Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness of Metallic Materials’.

Najczęściej wykorzystywana metoda wyznaczania odporności materiału na pękanie opiera się na wykorzystaniu doświadczalnego wyznaczania krytycznej wartości



prędkości uwalniania energii dla trójpunktowego zginania próbki z jednostronnym karbem (szczeliną). Schemat stanowiska badawczego oraz kształt badanej próbki pokazano na rys. 8.6. W przypadku obciążania próbki z materiału idealnie kruchego oraz zachowującego liniową sprężystość aż do początku katastroficznego pęknięcia wykresy obrazujące zależność siły  $F$  i przemieszczenia  $s$ , dla różnych próbek i różnych, ale liniowo sprężystych materiałów, są liniami prostymi o różnych kątach nachylenia. W przypadku obciążania próbki z materiału wykazującego odkształcenia plastyczne lub lepkoplastyczne wykres zależności między siłą i przemieszczeniem przestaje być linią prostą. Podobnie reaguje wspomniana zależność ( $F(s)$ ) na występowanie przed katastroficznym pęknięciem (zrównoważonego) stabilnego rozwoju (powiększania) początkowej szczeliny w badanej próbce. Wykres  $F(s)$  tym bardziej odbiega od linii prostej, im większy jest udział odkształceń nieodwracalnych (np. plastycznych) oraz podkrytycznego rozwoju szczeliny w procesie deformacji próbki poprzedzającego pęknięcie katastroficzne.

Do sporządzania bilansu energii uwalnianej w strefie przed czołem pęknięcia oraz prowadzenia analizy teoretycznej konieczne jest przyjęcie pewnego modelu materiału. Jednym z modeli materiałów chętnie wykorzystywanych w analizach teoretycznych przebiegu procesu pękania jest trójparametrowy model Ramberga-Osgooda:

$$s = F \cdot D + k \cdot (F \cdot D)^n \quad (8.36)$$

gdzie:

$F$  – siła obciążająca próbkę,

$s$  – wydłużenie (przemieszczenie),

$D$  – podatność elementu (próbki),

$k$  i  $n$  – parametry wyznaczane doświadczalnie dla badanego materiału.

W przypadku liniowej sprężystości (do chwili rozpoczęcia pękania katastroficznego) drugi człon wyrażenia (8.36) jest pomijany, a wykres zależności siły i przemieszczenia jest linią prostą. Prędkość uwalniania energii opisana jest w takim przypadku zależnością:

$$\bar{G} = \frac{1}{2} \cdot F^2 \cdot \frac{\partial D}{\partial a} \quad (8.37)$$

W chwili rozpoczęcia katastroficznego pękania, bez udziału odkształceń nieodwracalnych (np. plastycznych) oraz bez wystąpienia ustabilizowanej podkrytycznej propagacji szczeliny, wielkości  $a$ ,  $F$  oraz  $\bar{G}$  osiągają wartości krytyczne, które będą dalej oznaczane jako:  $a_{kryt} = a_c$ ,  $F_{kryt} = F_c$ ,  $\bar{G}_{kryt} = \bar{G}_c$ .

$$\bar{G}_{kryt} = \left[ \frac{1}{2} F_{kryt}^2 \cdot \frac{\partial D}{\partial a} \Big|_{kryt} \right] = \frac{1}{2} F_c^2 \cdot \left[ \frac{\partial D}{\partial a} \right]_c = \bar{G}_c \quad (8.38)$$

W takim przypadku wyznaczenie  $\bar{G}_c$  oraz innych parametrów charakteryzujących odporność na pękanie, np.  $K_{Ic}$ , nie stwarza trudności, co omówiono w p. 3 niniejszego rozdziału.

Jak wspomniano wcześniej, ogromna większość materiałów wykazuje zdolność do odkształceń nieodwracalnych (plastycznych lub lepko-sprężystych). W bilansie energii dla takich przypadków konieczne jest uwzględnienie energii związanej z tymi odkształceniami. Dość często występują również przypadki podkrytycznego rozwoju szczeliny, także wpływające na bilans energii wyzwalanej w strefie czoła szczeliny.

W przypadku wystąpienia tylko odkształceń nieodwracalnych, bez efektów podkrytycznej propagacji szczeliny, krytyczna prędkość wyzwiania energii opisana jest zależnością:

$$\tilde{G}_c = \tilde{G}_{kryt} = \left[ 1 + \frac{2nk}{n+1} \cdot (F_{kryt} \cdot D)^{n-1} \right] \cdot \frac{F_{kryt}^2}{2} \cdot \left[ \frac{\partial D}{\partial a} \right]_{a=a_0} \quad (8.39)$$

W ogólnym przypadku, gdy wystąpią zarówno odkształcenia nieodwracalne, jak i powolny przedkrytyczny rozwój szczeliny, krytyczna prędkość uwalniania energii opisana jest wzorem:

$$\tilde{G}_c = \tilde{G}_{kryt} = \left[ 1 + \frac{2nk}{n+1} \cdot (F_{kryt} \cdot D_{kryt})^{n-1} \right] \left( \frac{D_c}{D_0} \right)^2 \cdot \frac{F_{kryt}^2}{2} \cdot \left[ \frac{\partial D}{\partial a} \right]_{a=a_0} \quad (8.40)$$

Symbole  $D_0$  oraz  $D_c$  oznaczają w powyższych wzorach podatności układu przy początkowej długości szczeliny  $a_0$  oraz dla krytycznej długości szczeliny  $a_c = a_{kryt}$ .

Wyrażenia (8.39) oraz (8.40) można zapisać w nieco zmienionej formie, a mianowicie:

$$\tilde{G}_c = \left[ 1 + \frac{2nk}{n+1} (F_c \cdot D_c)^{n-1} \right] \cdot \bar{G}_c \cdots \text{dla } a_c = a_0 \text{ oraz} \quad (8.41a)$$

$$\tilde{G}_c = \left[ 1 + \frac{2nk}{n+1} (F_c \cdot D_c)^{n-1} \right] \left( \frac{D_c}{D_0} \right)^2 \cdot \bar{G}_c \cdots \text{dla } a_c = a_{kryt} \quad (8.41b)$$

Symbol  $\bar{G}$  oznacza w powyższych wzorach liniową prędkość uwalniania energii obliczoną dla stanu na początku inicjacji katastroficznego rozwoju szczeliny, tj. dla siły krytycznej  $F_{kryt} = F_c$  oraz dla krytycznej długości szczeliny  $a_{kryt} = a_c$ . Forma powyższych wzorów prowadzi do ich zapisu jako:

$$\tilde{G}_c = \Phi \cdot \bar{G}_c \quad (8.42)$$

gdzie współczynnik  $\Phi$  określony jest następującymi zależnościami:

$$\Phi = \left[ 1 + \frac{2nk}{n+1} (F_c \cdot D_c)^{n-1} \right] \text{ dla } a_c = a_0 \text{ oraz} \quad (8.43)$$

$$\Phi = \left[ 1 + \frac{2nk}{n+1} (F_c \cdot D_c)^{n-1} \right] \left( \frac{D_c}{D_0} \right)^2 \quad \text{dla } a_c \neq a_0 \quad (8.44)$$

Wyznaczanie prędkości uwalniania energii dla materiału o nieliniowej charakterystyce  $\tilde{G}_c$  jest operacją skomplikowaną, która wymaga również wykonania dodatkowych pracochłonnych eksperymentów. W związku z tym opracowany został standaryzowany, uproszczony system obliczeń, wspomagany tablicami współczynników korekcyjnych związanych z wykresem  $F(s)$  oraz kształtem i wymiarami próbki koniecznymi do opracowania wyników próby, tj. wyznaczenia krytycznej wartości uwalniania energii  $\tilde{G}_c$ .

### 8.7.1. ZNORMALIZOWANY POMIAR ODPORNOŚCI MATERIAŁU NA PĘKANIE DLA MATERIAŁÓW I KOMPOZYTÓW POLIMEROWYCH

Wyznaczenie wartości kryterialnych charakteryzujących odporność na pęknięcie dla materiałów sprężystych nie stwarza trudności, co omówiono w podpunkcie 8.3 niniejszego rozdziału, jednak istotnym ograniczeniem w przypadku współczesnych stali konstrukcyjnych, np. stali okrętowych, jest konieczność stosowania próbek o bardzo dużych wymiarach (długość ponad 1000 mm, grubość około 300 mm) oraz maszyn wytrzymałościowych o bardzo dużym nacisku, rzędu 20 000 ton.

Dla materiałów polimerowych o nieliniowych charakterystykach opracowana została uproszczona metoda pomiaru i obliczeń wspomagana tablicami współczynników korekcyjnych związanych z wykresem pomiarowym oraz kształtem i wymiarami zastosowanej próbki. Metodę standaryzuje norma ISO 13586:2000 pt. „Tworzywa sztuczne – Wyznaczanie odporności na kruche pęknięcie – metoda mechaniki pęknięcia w zakresie liniowo-sprężystym”. Norma ta została w 2018 roku uzupełniona i zastąpiona przez normę ISO 13586:2018 pod tym samym tytułem. Dokument ten określa zasady wyznaczania odporności na kruche pęknięcie tworzyw sztucznych w tzw. modzie I, czyli w trybie rozciągania szczeliny – rys. 8.6. Zdefiniowano dwie metody badania próbek z karbem: próbę zginania oraz próbę rozciągania w celu dopasowania eksperymentu do różnych rodzajów dostępnych urządzeń i różnych rodzajów materiałów.

Metody badawcze określone normą są odpowiednie do stosowania dla materiałów termoplastycznych i termoutwardzalnych, w tym ich kompozytów zawierających krótkie włókna cięte o długości  $\leq 7,5$  mm. W zależności od metody przetworstwa norma może być stosowana dla:

- kruchych i ciągliwo-kruchych materiałów termoplastycznie formowanych metodami wtrysku, wytłaczania i odlewania,
- kruchych i ciągliwo-kruchych materiałów termoutwardzalnie wytwarzanych metodami wtrysku i odlewania.

Założenia przyjętej metodyki badawczej wprowadzają ograniczenia liniowości wykresu przemieszczenie–obciążenie oraz szerokości i grubości próbki, tak by

zastosowany schemat obciążenia skutkował liniowym sprężystym zachowaniem materiału przy pękaniu oraz płaskim stanem odkształcenia w obrębie wierzchołka szczeliny.

Przyjęta norma jest zgodna z amerykańskimi normami badania odporności na kruche pęknięcie dla materiałów metalicznych oraz tworzyw sztucznych:

ASTM E 399-12: Metoda badania odporności na pęknięcie (KIC)  $K_{IC}$  w zakresie linio-wo-sprężystym przy płaskim stanie odkształcenia dla materiałów metalowych,

ASTM D 5045-14: Metoda badania odporności na pęknięcie oraz prędkości uwalniania energii deformacji w płaskim stanie odkształcenia dla tworzyw sztucznych.

Norma ISO 13586:2018 w swojej treści odnosi się również do następujących norm europejskich:

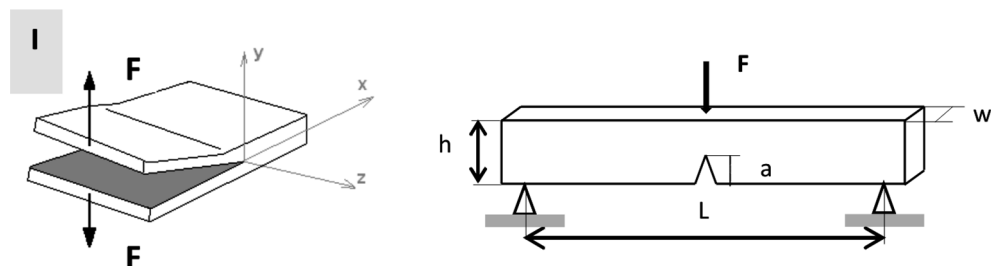
ISO 527-1: Tworzywa sztuczne – Oznaczanie właściwości przy rozciąganiu – Część 1: Zasady ogólne,

ISO 604: Tworzywa sztuczne – Oznaczanie właściwości przy ściskaniu,

ISO 2818: Tworzywa sztuczne – Przygotowanie próbek do badań przez obróbkę mechaniczną,

ISO 7500-1: Materiały metalowe – Kalibracja i weryfikacja statycznych jednoosiowych urządzeń testujących – Część 1: Maszyny do badań przy rozciąganiu/ ściskaniu – Kalibracja i weryfikacja układu pomiaru siły,

ISO 9513: Kalibracja układów ekstensometrycznych stosowanych w badaniach stanów jednoosiowych.



Rys. 8.6. Ilustracja trybu rozciągania szczeliny oraz charakterystyczne wymiary próbki z karbem w próbie trójpunktowego zginania

Norma ISO 13586:2000 przewiduje wyznaczenie wartości krytycznych: prędkości uwalniania energii potencjalnej układu  $G_{IC}$  [ $J/m^2$ ] oraz współczynnika intensywności naprężeń  $K_{IC}$  [ $Pa\sqrt{m}$ ]. Pierwsza z tych wielkości charakteryzuje zmianę pracy sił zewnętrznych  $\partial U_{ext}$  i energii deformacji  $\partial U_s$  w funkcji zmiany powierzchni szczeliny  $\partial A$  przy zapoczątkowaniu niekontrolowanego rozwoju pęknięcia. Natomiast druga z nich charakteryzuje rozkład pola naprężeń wokół wierzchołka szczeliny, która przyjmuje wartość graniczną zgodnie z zależnością określoną wzorem (8.3).

Krytyczny współczynnik intensywności naprężeń  $K_{IC}$  jest silnie zależny od grubości  $h$  badanego elementu i tylko dla płaskiego stanu odkształcenia (PSO)

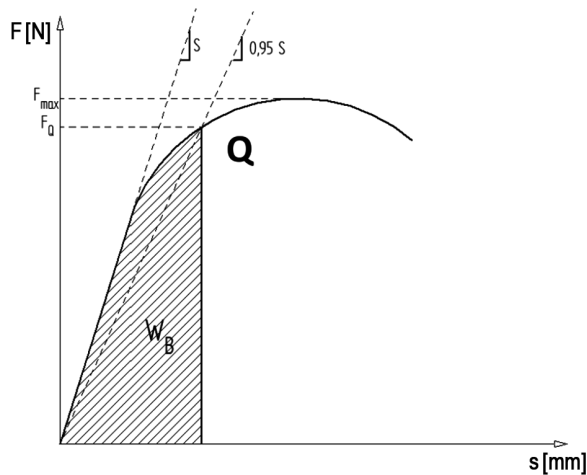
w obszarze szczeliny można go przyjmować jako stałą materiałową, co zilustrowano na rys. 8.3.

Jak już podano wcześniej (wzory (8.12) i (8.13)), istnieje zależność między krytycznym współczynnikiem intensywności naprężeń  $K_{IC}$  oraz krytyczną prędkością uwalniania energii potencjalnej układu  $G_{IC}$ :

$$G_{IC} = \frac{K_{IC}^2}{E} \quad \text{dla} \quad E = \frac{E_t}{1-\mu^2} \quad (8.45)$$

gdzie:  $E$  jest modułem sprężystości określonej dla PSO,  $E_t$  oznacza moduł sprężystości podłużnej, natomiast  $\mu$  – współczynnik Poissona, które wyznaczone są w próbie jednoosiowego rozciągania (norma ISO527-1).

Norma ISO 13586:2000 określa sposób wyznaczania wartości krytycznych siły  $F_Q$  oraz energii  $W_B$  inicjacji szczeliny, które utożsamiane są z początkiem procesu pękania. Fenomenologicznie wyznaczony początek inicjacji szczeliny, punkt  $Q$ , wyznacza 95% nachylenie krzywej siła–przemieszczenie w stosunku do hipotetycznego materiału o zachowaniu idealnie sprężystym – rys. 8.7.



Rys. 8.7. Wykres siły  $F$  w funkcji przemieszczenia trawersu maszyny wytrzymałościowej  $s$  oraz sposób wyznaczania wielkości  $F_Q$  i  $W_B$

Metoda przewiduje zastosowanie współczynników kalibrujących zależnych od geometrii  $f(a/w)$  oraz energii  $\Phi(a/w)$ , na podstawie których wyznacza się wartości kryterialne prędkości uwalniania energii  $G_Q$  oraz współczynnika intensywności naprężeń  $K_Q$  wg następujących zależności:

$$G_Q = \frac{W_B}{hw\varphi\left(\frac{a}{w}\right)} \quad (8.46)$$

$$K_Q = f\left(\frac{a}{w}\right) \frac{F_Q}{h\sqrt{w}} \quad (8.47)$$

Przyjęte kryterium płaskiego stanu odkształcenia w obrębie wierzchołka szczeliny dla próbki z karbem jednostronnym poddanej trójpunktowemu zginaniu weryfikuje się na podstawie następujących zależności:

$$h > 2,5\bar{r}; \quad a > 2,5\bar{r}; \quad (w - a) > \bar{r}$$

gdzie:

$$\bar{r} = \frac{K_Q^2}{\sigma_y^2}$$

oznacza długość charakterystyczną strefy plastyczności ( $\sigma_y$  – granica plastyczności).

## LITERATURA

- [1] Jodłowski H., Metoda rozpoznawania odkształceń plastycznych w procesie obciążania stali wykazujących niestateczność materiałową. Praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 2007.
- [2] Bućko S., Jodłowski H., Inicjacja odkształceń plastycznych w stali z wyraźną granicą plastyczności w warunkach gradientu naprężeń. *Acta Mechanica et Automatica*, Vol. 3, nr 1, 2009.
- [3] Bućko S., Jodłowski H., Inicjacja odkształceń plastycznych w stalach z niestatecznością materiałową w warunkach rozciągania i czystego zginania. *Czasopismo Techniczne* nr 4, 2010.
- [4] Bućko S., Jodłowski H., Trzebicki M., An experimental-numerical analysis of plastic zones initiation around holes in shields made of steel 45 under tension. *Archive of Mechanical Engineering*, Vol. LXI, No 1, 2014.
- [5] Jodłowski H., Trzebicki M., The Comparative Analysis of Experimental and Numerical Results of Initial Phase of Plastic Deformation in Shields with Openings Under Tension, *Experimental Mechanics of Solids*, 2015.
- [6] Jodłowski H., Bućko S., Gibas P., Visualization of Processes of Plastic Deformation Initiation in Conditions of Pure Tension and Pure and Simple Bending, *Experimental Mechanics of Solids*, 2015.
- [7] Bućko S., Jodłowski H., Trzebicki M., Doświadczalno-numeryczna analiza pierwszej fazy odkształceń plastycznych w stalach z niestatecznością materiałową, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2015. (Do pracy załączono film obrazujący ważne przebiegi procesów inicjacji odkształceń plastycznych „Wizualizacja inicjacji odkształceń plastycznych w stalach z niestatecznością materiałową w warunkach rozciągania oraz czystego i prostego zginania” – Stefan Bućko, Henryk Jodłowski, Piotr Gibas).
- [8] Wnuk M.P., Podstawy mechaniki pękania, Wydawnictwo Naukowe AKAPIT, Kraków 2008.
- [9] Kocańda S., Zmęczeniowe niszczenie metali, WNT, Warszawa 1972.
- [10] Dietrich M. (red.), Podstawy konstrukcji maszyn, WNT, Warszawa 1995.
- [11] Kocańda S., Szala J., Podstawy obliczeń zmęczeniowych, PWN, Warszawa 1997.
- [12] Paris P., Erdogan F., A critical analysis of crack propagation laws, *Journal of Basic Engineering*, Trans. ASME, 12/1963, 528–534.
- [13] Paris P., Sih G.C., Stress analysis of cracks, *Trans. ASME*, 3/1965, 30–83.
- [14] Liu H.W., Fatigue crack propagation and the stresses and strains In the vicinity of cracks, *Applied Materials Research*, 10/1964, 229–237.
- [15] Neimitz A., Mechanika pękania, PWN, Warszawa 1998.
- [16] Schijve J., *Fatigue of Structures and Materials*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht–Boston–London 2001.

## ROZDZIAŁ 9

# STATECZNOŚĆ KONSTRUKCJI

Stefan BUĆKO, Agnieszka CHOJNACKA-BROŻEK

### 9.1. WPROWADZENIE

Rozwój technik budowlanych oraz doskonalenie materiałów doprowadziły w pewnym okresie do częstego występowania katastrof budowlanych z niezrozumiałych przyczyn. Mianowicie, formalnie poprawnie zaprojektowane konstrukcje, według ówczesnych kryteriów, ulegały gwałtownemu zniszczeniu wskutek zgięcia i następnie złamania słupów poddanych w zasadzie czystemu ściskaniu. Czynnikiem mobilizującym ówczesnych konstruktorów oraz naukowców do intensyfikacji badań był zapewne fakt, że najczęściej prowadziło to do katastroficznego zniszczenia konstrukcji.

Istotnym utrudnieniem analizy przyczyn tych katastrof (prawdopodobnie XVII/XVIII wiek) było stosowanie w analizach, zresztą wówczas powszechne, zasady zeszywnienia, która – jak wykazało później rozwiązanie Eulera – wykluczała możliwość znalezienia poprawnego rozwiązania problemu wyboczenia.

Zasada zeszywnienia odgrywa ważną rolę w standardowej analizie konstrukcji rzeczywistych, czyli odkształcalnych. W przypadku analizy stateczności konstrukcji, której istotą jest poszukiwanie innej, tj. odkształconej, postaci równowagi, rezygnacja ze stosowania zasady zeszywnienia okazała się koniecznością warunkującą sukces analizy. Warto zatem ją tutaj przytoczyć.

**„Jeżeli ciało odkształcalne znajduje się w równowadze pod działaniem pewnego układu sił, to identyczne ciało sztywne pod działaniem tego samego układu sił także znajduje się w równowadze”.**

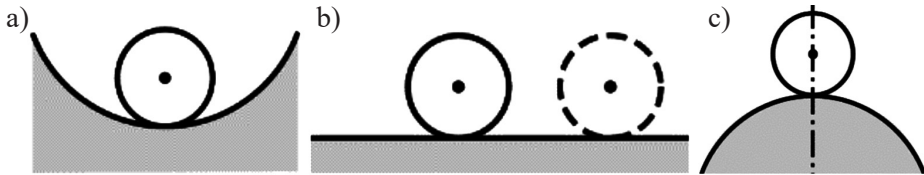
Pozwala to usztywniać konstrukcje odkształcalne znajdujące się w równowadze pod działaniem przyłożonych do nich sił i stosować do analizy sił (np. obliczania reakcji, sił wewnętrznych itp.) zasad statyki, które formalnie odnoszą się do swobodnego ciała sztywnego. Zazwyczaj ta operacja wykonywana jest „mechanicznie”, tzn. bez głębszej analizy, nie pamiętając o tym, że **twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe**. Z równowagi ciała sztywnego pod działaniem pewnego układu sił nie musi wynikać równowaga ciała odkształcalnego o podobnym kształcie – **np. ściskany sztywny pręt oraz tak samo obciążona, czyli ściskana, wiotka linka**.

Nowością zastosowaną przez Eulera (1744) była rezygnacja ze stosowania zasady zeszywnienia i postawienie pytania: **„czy istnieje inna postać równowagi**



osiowo ściskanego, prostego i sprężystego pręta?”. Przeprowadzona przez Eulera analiza problemu uwzględniająca **inną niż pierwotna postać równowagi oraz wpływ odkształceń na siły wewnętrzne w pręcie** (tu jest odstępstwo od zasady zeszywnienia) wykazała, że takie „inne” postacie pręta są możliwe, ale tylko dla pewnych szczególnych wartości sił ściskających. Jedną, najmniejszą z tych sił, nazwano „siłą krytyczną”, a później „siłą eulerowską”. Jednak formalnie postać prosta, czyli pierwotna postać pręta, jest teoretycznie możliwa, również powyżej siły krytycznej, ale w stanie równowagi „chwijnej”.

Warto w tym miejscu przypomnieć znane z fizyki trzy podstawowe stany równowagi pokazane symbolicznie na rys. 9.1a, b i c.



Rys. 9.1. Podstawowe stany równowagi: a) równowaga trwała; b) równowaga obojętna; c) równowaga chwijna

Rysunek 9.1a przedstawia „stan równowagi trwałej”: po wytrąceniu z położenia równowagi (małym impulsem) kulka będzie wykonywać ruch okresowy wokół najniższego położenia, w którym kulka posiada najmniejszą energię potencjalną **spośród wszystkich położenia sąsiednich**.

Rysunek 9.1b przedstawia stan tzw. równowagi obojętnej; kulka wytrącona z początkowego położenia będzie poruszać się ruchem postępowym, przy czym poziom energii potencjalnej nie zmienia się z położeniem, ruch będzie opóźniony w wyniku strat na pokonanie oporów ruchu, co skutkuje właśnie opóźnieniem ruchu.

Rysunek 9.1c prezentuje stan równowagi chwijnej; teoretycznie pokazane położenie kulki jest możliwe, jednak najdrobniejszy impuls spowoduje jej ruch przyspieszony. W pokazanym położeniu na rys. 9.1c kulka posiada maksymalną wartość energii potencjalnej **spośród wszystkich położenia sąsiednich**.

Utratę stateczności konstrukcji możemy zatem określić jako „**zmianę stanu równowagi pierwotnej postaci konstrukcji ze stanu równowagi trwałej na stan równowagi chwijnej**”. Między stanem równowagi trwałej i stanem równowagi chwijnej wyróżnia się jeszcze stan pośredni, określanany jako „**równowaga obojętna**”.

Sformułowane przez Eulera kryterium stateczności mówi, że stan krytyczny jest to stan, kiedy możliwe są i równoważne dwie postacie równowagi pręta, tj. postać prosta (pierwotna) oraz postać sąsiednia, tzn. różna od pierwotnej, ale nieskończenie jej bliska. Zjawisko to często nazywane jest „**bifurkacją**”. Wartość siły odpowiadająca temu stanowi nazywamy „**siłą krytyczną**” lub „**siłą eulerowską**”. Ważną cechą tego stanu jest fakt przejścia **z pierwotnej postaci do postaci sąsiedniej bez zmiany wartości siły oraz całkowitej energii potencjalnej pręta, w warunkach**



**obciążenia posiadającego potencjał.** Pierwsza praca Eulera, ogłoszona w roku 1744, dała impuls do intensywnego rozwoju badań zjawisk towarzyszących „utracie stateczności”, nazywanej także często „wyboczeniem”.

Stanowiło to początek niezwykle burzliwego rozwoju badań nad analizą stateczności bardzo wielu konstrukcji stanowiących często rozwiązania nowatorskie. Rozwój tej dyscypliny wiedzy trwa do dzisiaj i przyczynił się do ogromnego postępu techniki. Jest to jeden z ważniejszych schematów zniszczenia, stanowiący poważne zagrożenie wynikające z często katastroficznego przebiegu zniszczenia konstrukcji. Czynniki napędzającymi burzliwy rozwój badań nad statecznością były zastosowania w konstrukcji okrętów podwodnych, samolotów, raket kosmicznych oraz w budownictwie i przemyśle, głównie chemicznym.

Jednym z elementów podkreślających **zagrożenie** związane z utratą stateczności jest stosowanie specjalnych oznaczeń współczynnika bezpieczeństwa, np. „ $x_j$  lub  $j$ ”, ze względu na utratę stateczności oraz zwyczaju stosowania znacząco podwyższonych wartości tego współczynnika wobec wartości stosowanych dla innych (klasycznych) schematów zniszczenia.

Intensywne badania pozwoliły na sformułowanie kilku różnych postaci „kryteriów stateczności” odpowiadających różnym konstrukcjom, różnym warunkom obciążenia, np. obciążeniom niekonserwatywnym oraz dynamicznym. Różnorodność kryteriów stateczności służy również analizie stateczności różnorodnych konstrukcji, w tym sięganiu do projektowania konstrukcji pracujących bezpiecznie przy obciążeniach nadkrytycznych, co dotyczy w zasadzie konstrukcji specjalnych.

## 9.2. KRYTERIA STATECZNOŚCI

### 9.2.1. PODSTAWOWE KRYTERIA STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI:

1. Kryterium Eulera – utrata stateczności wskutek bifurkacji.
2. Kryterium energetyczne – przejście z pierwotnej postaci równowagi do postaci „sąsiedniej” odbywa się bez zmiany energii potencjalnej konstrukcji (zatem także wartości siły).
3. Kryterium kinetyczne lub tzw. dynamiczne – obciążenie konstrukcji osiąga wartość krytyczną, jeżeli częstość drgań wymuszanych impulsem przy rosnącym obciążeniu zmierza do zera.
4. Kryterium małych niedokładności polega na: analizie odkształceń pod wpływem działających obciążeń o założonym charakterze, jakim poddawana jest konstrukcja wykazująca niewielkie odstępstwa od idealnego kształtu. Jeżeli przemieszczenia (zazwyczaj ugięcia) konstrukcji pod wpływem wzrastającego obciążenia zmierzają do nieskończoności, to wartość obciążenia zmierza do „obciążenia krytycznego”.

Motywy tworzenia kolejnych kryteriów stateczności były potrzeby związane z analizą konstrukcji poddanych działaniu obciążeń niekonserwatywnych oraz np. śle-

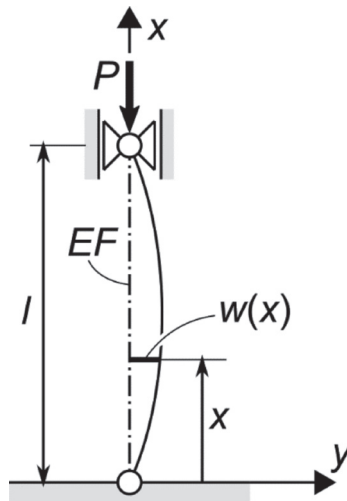
dających, jak również obserwowane rozbieżności między teorią i wynikami eksperymentów. W szczególności kryterium małych niedokładności, wprowadzone przy analizie stateczności powłok, pozwoliło na wyjaśnienie przyczyn wielu rozbieżności między teorią dotyczącą idealnych konstrukcji oraz wynikami eksperymentów wykonywanych dla powłok (o standardowej dokładności) oraz prętów z niedokładnościami kształtu.

Należy jeszcze w tym miejscu wspomnieć o nowszych formach utraty stateczności, jak np. utrata stateczności wskutek przeskoku (zostanie omówiona w dalszej części tego rozdziału), oraz nietypowych formach utraty stateczności, jak np. flatter występujący jako skutek działania sił, np. między przepływającym gazem i powierzchnią powłoki lub innej konstrukcji (inaczej wymuszeń towarzyszących odrywaniu strumienia gazu od opływanej powierzchni). Jest to zjawisko, które może doprowadzić do rezonansu opływanej konstrukcji i katastrofy.

### 9.2.1.1. Zastosowanie kryterium Eulera

Dla ilustracji omawianego problemu celowe jest przypomnienie rozwiązania klasycznego zagadnienia Eulera, co pokazano poniżej. Przyjęto założenia: pręt prosty, idealnie sprężysty, pryzmatyczny, zamocowany przegubowo na obu końcach, ścisnany osiową siłą  $P$  – rys. 9.2. Pytanie sformułowane przez Eulera: „**czy istnieje inna postać równowagi rozpatrywanego pręta?**”

Zadanie polega zatem na poszukiwaniu innej, niż pierwotna, postaci pręta, co sprowadza się, przy założonych warunkach brzegowych, do poszukiwania postaci wygiętej (zakrzywionej) i stąd metoda analizy, w której kluczowe jest odrzucenie zasady zeszywnienia i uwzględnienie deformacji wygiętego pręta przy wyznaczaniu sił wewnętrznych oraz poszukiwanie linii ugięcia:



Rys. 9.2. Analiza „sąsiedniej” (tj. różnej od pierwotnej) postaci równowagi ścisnanego osiowo prostego pręta

$$EJw'' = -M_g(x), \text{ przy czym} \quad (9.1)$$

$$M_g(x) = P \cdot w(x)$$

$$EJw'' + P \cdot w(x) = 0; \quad (9.2)$$

$$w(0) = 0 \text{ oraz } w(l) = 0 \quad (9.3)$$

$$\text{wobec } \frac{P}{EJ} > 0 \text{ mamy } \frac{P}{EJ} = k^2 \quad (9.4)$$

$$EJw'' + k^2 w = 0 \quad (9.5)$$

$$w = A \cos kx + B \sin kx \quad (9.6)$$

$$w(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \quad (9.7)$$

$$w(l) = 0 \Rightarrow B \sin kl = 0$$

i dalej  $B = 0$ , co daje  $w \equiv 0$

$$\text{lub } \sin kl = 0 \Rightarrow kl = n\pi \quad (9.8)$$

Wartość stałej  $B$  (parametru ugięcia) pozostaje nieokreślona jako wielkość **dowolnie mała**. Wobec wyniku (9.8) otrzymuje się:

$$P = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2}; \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, \dots \quad (9.8a)$$

tj. nieskończony ciąg rozwiązań, czyli wartości sił oraz postaci wygiętej osi pręta odpowiadających poszczególnym wartościom  $n$ . Analiza przebiegu procesu obciążania pręta narastającą siłą  $P$  oraz znane z przypadków zniszczenia bądź uszkodzenia prętów ściskanych nowe postacie równowagi jednoznacznie wskazują, że krytyczna wartość siły odpowiada wartości  $n = 1$ , a linia ugięcia pręta odpowiada jednej półfali sinusoidy (dla przyjętych warunków brzegowych). Zatem dla rozpatrywanego pręta wartość „siły krytycznej” lub inaczej „siły eulerowskiej” wynosi:

$$P_{kr} = P_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l^2} \quad (9.9)$$

Podstawienie  $J = J_{\min}$  wynika z faktu, że wygięcie pręta, przy swobodzie przemieszczeń, nastąpi w płaszczyźnie najmniejszej sztywności zginania. Postać sąsiednia pręta opisana jest równaniem:

$$w = B \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l} \quad (9.10)$$

gdzie  $B$  jest nieokreślone jako parametr ugięcia (dowolnie małe).

Naprężenie krytyczne lub eulerowskie oblicza się jak dla ściskania:

$$\sigma_{kr} = \sigma_E = \frac{P_E}{F} \quad (9.11)$$

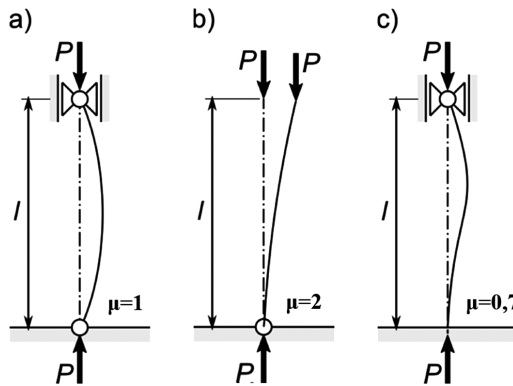
Po wykorzystaniu ogólnie znanych zależności otrzymuje się:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l^2 \cdot F} = \frac{\pi^2 \cdot E}{l^2} \cdot \frac{J_{\min}}{F} = \frac{\pi^2 \cdot E}{l^2} \cdot i_{\min}^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}; \text{ gdzie } \lambda = \frac{l}{i_{\min}} \quad (9.12)$$

Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że wartość siły krytycznej istotnie zależy od warunków brzegowych, czyli sposobu podparcia pręta. Przeprowadzone analizy wykazały, że można sformułować ogólny wzór na siłę krytyczną (eulerowską) obejmującą różne sposoby podparcia pręta:

$$P_{kr} = P_E = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{l_r^2} \quad (9.13)$$

Wielkość  $l_r$  znajduje interpretację fizyczną, mianowicie jako „długość półfali” sąsiedniej postaci równowagi, co pokazano na rys. 9.3.



Rys. 9.3. Wybrane formy sąsiednich postaci równowagi dla różnych warunków brzegowych

Z punktu widzenia zastosowań teorii Eulera w praktyce obliczeniowej istotne jest wyraźne określenie granic stosowalności omówionej powyżej teorii stateczności. Granice stosowalności wyprowadzonych powyżej wzorów wynikają z podstawowego założenia o liniowej sprężystości materiału pręta, a zatem warunek stosowalności teorii Eulera ma postać:

$$\sigma_{kr} = \sigma_E = \frac{P_E}{F} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq S_c \quad (9.14)$$

gdzie  $S_c$  – granica sprężystości materiału pręta.

Jeżeli naprężenie obliczone wzorem (9.11) przekroczy wartość  $S_c$ , co oznacza, że warunek (9.14) nie jest spełniony, wówczas wzoru Eulera stosować nie wolno,



$$\delta = \frac{l\sqrt{8}}{\pi} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}} - 1} \left[ 1 - \frac{1}{8} \left( \frac{P}{P_{kr}} - 1 \right) \right] \quad (9.16)$$

Wzór (9.16) według [6], bardzo rzadko cytowany, opisuje maksymalne ugięcie ściskanego osiowo pręta o końcach zamocowanych przegubowo (patrz rys. 9.2) dla sił przekraczających wartości siły  $P_{kr} = P_E$ . Analiza zachowań pręta po przekroczeniu siły krytycznej wskazuje na szybki przyrost ugięcia dla obciążenia przekraczającego wartość siły krytycznej  $P_{kr} = P_E$ . Dla siły  $P$  o wartości przekraczającej siłę krytyczną o 1% maksymalne ugięcie pręta wynosi prawie 9% **długości pręta**.

Powyższa uwaga ma na celu poszerzenie poglądu Czytelnika na rzeczywiste zachowanie konstrukcji zagrożonej utratą stateczności. Chodzi autorom o zwrócenie uwagi na złożoność problemu utraty stateczności. Nie jest celem autorów zachęcanie projektantów do wchodzenia przy projektowaniu konstrukcji w stany obciążeń „nadkrytycznych”. Takie rozwiązania bywają stosowane, ale zawsze poprzedzone bardzo wnikliwymi analizami teoretycznymi i badaniami doświadczalnymi.

### 9.2.1.2. Kryterium kinetyczne

**Kryterium kinetyczne** jest możliwe do wykorzystania również w badaniach doświadczalnych, mianowicie możliwe jest wprowadzanie konstrukcji w drgania przez zadanie impulsu przy różnych obciążeniach. Technicznie możliwy jest pomiar częstości drgań własnych przy kolejnych, rosnących obciążeniach oraz sporządzenie wykresu zależności częstości drgań własnych od wartości obciążenia. Można zatem określić z dość dużą dokładnością punkt przecięcia krzywej z osią obciążenia, co wyznacza wartość obciążenia krytycznego. Należy jednak podkreślić, że niezbędne pomiary są dość kłopotliwe i wymagające specjalnej aparatury do zachowania dokładności wyników.

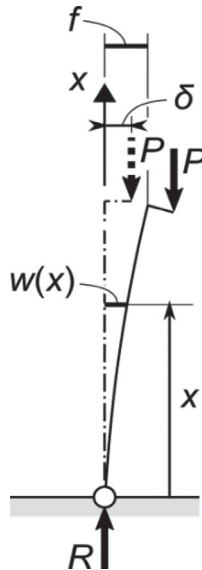
### 9.2.1.3. Przykład zastosowania kryterium małych niedokładności do wyznaczenia siły krytycznej

Czwarte z wymienionych w p. 9.2.1 kryteriów, „**kryterium małych niedokładności**”, zostało opracowane na potrzeby uściślenia wyników analiz stateczności powłok, gdzie występowały duże rozbieżności między wynikami obliczeń i badań doświadczalnych. Pogłębione analizy teoretyczne oraz wyniki badań doświadczalnych obciążeń krytycznych powłok walcowych wykonanych bardzo precyzyjnie pozwoliły na uzyskanie wartości obciążeń krytycznych o wartościach ponad 90% obciążenia teoretycznego. Wyniki tych eksperymentów zmieniły poglądy badaczy problemu, wykazały bowiem, że przyczyn rozbieżności teorii i eksperymentów należy poszukiwać w eksperymentach, co pozwoliło ustalić, że główną przyczyną rozbieżności są błędy kształtu badanych modeli oraz rzeczywistych konstrukcji. Kryterium to obejmuje bardzo znaczącą liczbę rzeczywistych konstrukcji, które z wielu powo-

dów nie mogą być idealne. Czynnikiem przyspieszającym tempo prac badawczych (głównie przepływ pieniędzy na badania i analizy) były potrzeby techniki raketowej, techniki budowy okrętów podwodnych, techniki budowy samolotów, a także potrzeby nowoczesnych działów przemysłu. Badania te pozwoliły na opracowanie metod uwzględniania, na etapie obliczeń, wpływu zaburzeń kształtu na wartości obciążenia krytycznego oraz charakter utraty stateczności, np. problemy wybożenia w formie przeskoku. Bliższe omówienie tego sposobu utraty stateczności zostanie zaprezentowane w dalszych częściach rozdziału.

Jednym z dość ważnych i przydatnych rezultatów wspomnianych analiz było sformułowanie kryterium małych niedokładności oraz tzw. „kryterium Koitera”. Kryterium małych niedokładności okazało się bardzo użyteczne w doświadczalnym wyznaczaniu obciążenia krytycznego również dla prętów. Efektywnie realizuje się ten proces, prowadząc analizę teoretyczną pręta, np. ściskanego mimośrodowo, i wyznaczając jego ugięcia. Udowodniono, że jeżeli obciążenie przyłożone mimośrodowo zmierza do wartości krytycznej ( $P_{kr} = P_E$ ), to ugięcia takiego pręta zmierzają do nieskończoności. W badaniach doświadczalnych wykres ugięć w funkcji obciążenia będzie zmierzał do asymptoty prostopadłej do osi obciążenia. Poniżej przedstawiono przykład analizy pręta ściskanego mimośrodowo i utwierdzonego na jednym końcu.

Demonstracja zastosowania kryterium małych niedokładności do doświadczalnego wyznaczania wartości siły krytycznej zostanie przedstawiona na przykładzie pręta utwierdzonego na dolnym końcu oraz obciążonego na końcu swobodnym siłą  $P$  przyłożoną z mimośrodem o wartości  $\delta$ . Wartość siły eulerowskiej dla pręta jak na rys. 9.5, ale ściskanego osiowo, podaje wzór (9.17):



Rys. 9.5. Koncepcja doświadczalnego wyznaczania siły krytycznej na podstawie kryterium „małych niedokładności”

$$P_E = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_{\pi}}{4l^2} \quad (9.17)$$

$$M_g = -P(f + \delta - w) \quad (9.18)$$

$$EJw'' = -M_g \quad (9.19)$$

$$EJw'' = P(f + \delta) - Pw \quad (9.20)$$

$$EJw'' + Pw = P(f + \delta) \quad (9.21)$$

$$\frac{P}{EJ} = k^2 \quad (9.22)$$

$$w'' + k^2w = k^2(f + \delta) \quad (9.23)$$

$$w = A \cos kx + B \sin kx + (f + \delta) \quad (9.24)$$

$$w(0) = 0; w'(0) = 0; w(l) = f \quad (9.25)$$

Z warunków brzegowych otrzymuje się wartości stałych  $A$  oraz  $B$ :

$$A = -(f + \delta) \text{ oraz } B = 0 \quad (9.26)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{EJ}} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{4l^2 P}{\pi^2 EJ}} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}}} = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \quad (9.27)$$

Z warunku  $w(l) = f$  otrzymuje się po przekształceniach:

$$f = \delta \frac{1 - \cos kl}{\cos kl} \quad (9.28)$$

$$kl = \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}}} \cdot l = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}}} \quad (9.29)$$

Wykorzystując zależności (9.28) oraz (9.29), otrzymuje się:

$$f = \delta \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{kr}}}\right)} \quad (9.30)$$

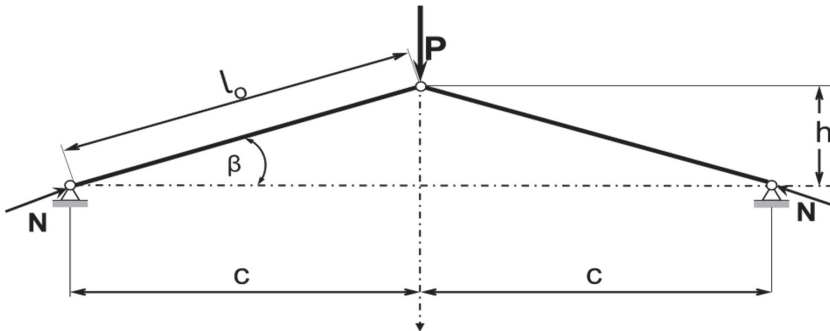


Jeżeli siła  $P$  będzie zmierzać do wartości krytycznej  $P_{kr}$ , wówczas  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{kr}}}\right)$  zmierza do  $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ; zatem  $f$  zgodnie z wzorem (9.30) zmierza do nieskończoności.

Powyższa analiza potwierdza skuteczność kryterium małych niedokładności przy wyznaczaniu doświadczalnym wartości obciążenia krytycznego, tj. siły krytycznej dla pręta ściskanego osiowo.

### 9.3. UTRATA STATECZNOŚCI WSKUTEK PRZESKOKU

Obserwacje i analizy zjawisk utraty stateczności przez specjalne układy prętów, a głównie przez powłoki, których badania były przez długi czas szczególnie intensywne, wykazały, że przejście do nowej postaci równowagi odbywa się często wskutek przeskoku, przy czym występujące przy tym przemieszczenia nie są bardzo małe, lecz skończone. Przez pojęcie „przemieszczenia skończone” należy rozumieć przemieszczenia o wielkościach porównywalnych z grubością powłoki lub poprzecznymi wymiarami prętów (np. w granicy kilkakrotnie większe od tych wymiarów).



Rys. 9.6. Schemat statyczny „Kraty Misesa”

Związki przemieszczeniowo odkształceniowe w takich zagadnieniach przestają być liniowe, co istotnie komplikuje analizę teoretyczną. Dla potrzeb, które stanowiły motywację do podjęcia pracy nad prezentowaną książką, nie ma konieczności jak również możliwości prezentacji analitycznych rozwiązań np. zagadnienia przeskoku w utracie stateczności powłok walcowych, choćby z powodu dużych trudności w analizie matematycznej. Bardzo wygodny, do prezentacji zagadnienia przeskoku, jest przykład analizy zjawiska przeskoku układu prętowego (modelu) nazywanego „kratą Misesa”. Krata Misesa jest to płaski układ dwóch prętów prostych, sprężystych i nieważkich, połączonych przegubowo, podpartych przegubowo nieprzesuwnie na jednym poziomie oraz obciążonych siłą przyłożoną w punkcie łączenia prętów prostopadle do linii łączącej punkty ich podparcia, co pokazano na rys. 9.6. Trzeba

również podkreślić, że analizowane dalej przemieszczenia poszczególnych punktów dotyczą deformacji „kraty” przed wystąpieniem przeskoku układu.

W prowadzonych dalej analizach zostanie podtrzymane założenie, że przemieszczenia np. węzła połączenia prętów są małe w stosunku do długości prętów i rozstawu punktów ich podparcia, co sprawia, że kąty obrotu prętów są małe (rys. 9.7). W rezultacie umożliwia to korzystanie z rozwinięć funkcji trygonometrycznych w szeregi Maclaurina oraz uwzględnianie tylko dwóch pierwszych wyrazów tych szeregów. Dla przykładu poniżej pokazano rozwinięcie funkcji sinus:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots \cong x \quad (9.31)$$

Jeżeli „ $x$ ” wyrażone w radianach jest małe, np. dla  $x = 10^\circ$ , co odpowiada  $x = 0,1745$  [rd], natomiast dokładna wartość funkcji  $\sin(0,1745rd) = 0,1736$  (tj. 0,995 wartości kąta), a przy kątach mniejszych różnice będą jeszcze mniejsze. Podobnie dla małych wartości „ $x$ ” będzie wykorzystywane przybliżenie:

$$\sqrt{1+x^2} \cong 1 + \frac{1}{2}x + \dots \quad (9.32)$$

Odształcenie każdego z prętów kraty Misesa wynosi:

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0}, \text{ gdzie } l \text{ jest długością pręta po przemieszczeniu węzła } K. \quad (9.33)$$

$$l_0^2 = c^2 + h^2 = c^2 + (c \cdot \operatorname{tg} \beta)^2 = c^2(1 + \beta^2); \text{ przyjęto przybliżenie } \operatorname{tg} \beta \cong \beta \quad (9.34)$$

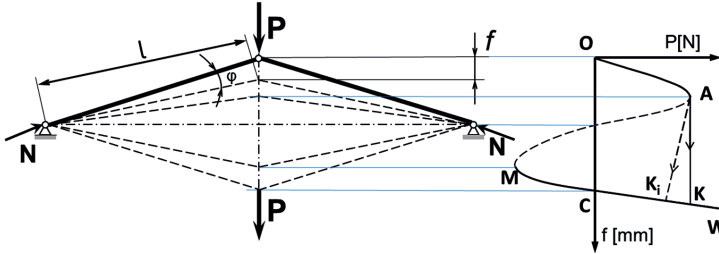
$$l_0 = c\sqrt{1 + \beta^2} \cong c\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) \quad (9.35)$$

$$l^2 = c^2 + (h-f)^2 = c^2 + [\operatorname{ctg}(\beta - \varphi)]^2 = c^2[1 + (\beta - \varphi)^2] \quad (9.36)$$

$$l = c\sqrt{1 + (\beta - \varphi)^2} \cong c\left[1 + \frac{1}{2}(\beta - \varphi)^2\right] \quad (9.37)$$

Podstawiając (9.35) i (9.37) do wzoru (9.33), otrzymuje się:

$$\varepsilon = \frac{c\left[1 + \frac{1}{2}(\beta - \varphi)^2\right] - c\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)}{c\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right)} - \frac{\varphi\left(\beta - \frac{1}{2}\varphi\right)}{1 + \frac{1}{2}\beta^2} \cong -\varphi\left(\beta - \frac{1}{2}\varphi\right) \quad (9.38)$$



Rys. 9.7. Wykres stanów równowagi kraty Misesa

Reakcja  $N$  w miejscu podparcia pręta nieważkiego i sprężystego jest równa co do wartości bezwzględnej sile normalnej w pręcie i może być obliczona z zależności:

$$N = EF \cdot |\varepsilon| = EF\varphi \left( \beta - \frac{1}{2}\varphi \right) \quad (9.39)$$

Z równania równowagi węzła  $M$  otrzymuje się zależność:

$$2N \sin(\beta - \varphi) - P = 0 \quad (9.40)$$

Dla małego kąta  $(\beta - \varphi)$  można wykorzystać zasady aproksymacji z początku rozdziału, co prowadzi do uproszczonego wzoru na  $P$ :

$$P \cong 2N(\beta - \varphi) = EF\varphi(2\beta - \varphi)(\beta - \varphi) \quad (9.41)$$

W celu uproszczenia dalszej analizy problemu wygodnie jest zastąpić kąt  $\varphi$  odpowiadającym mu przemieszczeniem  $f$  w myśl stosowanych aproksymacji dla małych kątów  $\varphi = \beta \frac{f}{h}$  wobec związku:  $\frac{\varphi}{\beta} \cong \frac{f}{h}$ , co w rezultacie prowadzi do zależności:

$$P = EF\beta \frac{f}{h} \left( 2\beta - \beta \frac{f}{h} \right) \left( \beta - \beta \frac{f}{h} \right) \quad (9.42)$$

Po wykonaniu działań przewidzianych we wzorze (9.42) oraz redukcji wyrazów podobnych:

$$P = EF - \frac{\beta^3}{h^3} (f^3 - 3hf^2 + 2h^2 f) \quad (9.43)$$

Wykres zależności  $P(f)$  przedstawiono na rys. 9.7.

Funkcja opisująca zmienność siły  $P$  w zależności od przemieszczenia  $f$  posiada trzy miejsca zerowe, a mianowicie:

$$f_1 = 0, f_2 = h, f_3 = 2h \quad (9.44)$$

Warunek ekstremum lokalnego w postaci  $\frac{dP}{df} = 0$  wykazał dwa ekstrema lokalne, mianowicie jedno maksimum lokalne w punkcie  $f_1 = 0,42264 \cdot h$  oraz minimum lokalne  $f_2 = 1,5773 \cdot h$ .

Do oceny stateczności układu (kraty Misesa) należy wykorzystać kryterium Koitera, które formułuje następujące warunki stateczności postaci tego typu układów; „punkty wykresu, dla których  $dP/df > 0$ , odpowiadają położeniom równowagi trwałej, natomiast punkty, dla których  $dP/df < 0$ , a w zasadzie  $dP/df \leq 0$ , odpowiadają położeniom niestatecznym, czyli równowadze chwiejnej”, co jest równoważne przeskokowi; na wykresie stanów równowagi części krzywej odpowiadające położeniom niestatecznym wykreślono linią przerywaną.

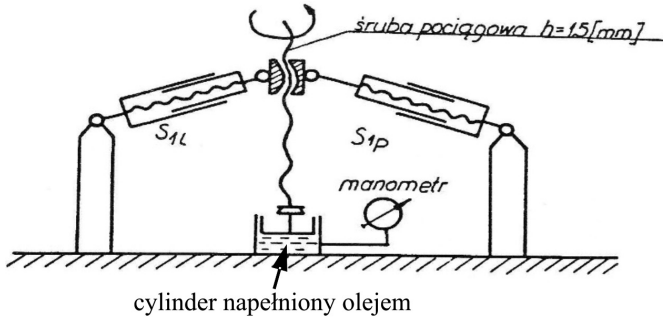
Zależność między siłą  $P$  i przemieszczeniem  $f$ , w pierwszej fazie obciążania, jest wyraźnie nieliniowa. Jest to zależność analogiczna do zależności obciążenie (ciśnienie zewnętrzne) i przemieszczenie promieniowe (ugięcie) powłoki walcowej z małymi niedokładnościami kształtu, np. odstępstwami od kształtu koła. Osiągnięcie punktu maksimum oznaczonego jako  $A$  (pierwsze ekstremum lokalne) oznacza (wg kryterium Koitera) przeskok do punktu na części krzywej odpowiadającej położeniom statecznym. Przeskok może odbyć się wzdłuż linii poziomej do punktu  $K$ , jeżeli wartość siły  $P$  nie ulegnie zmianie w trakcie przeskoku lub wzdłuż linii o nachyleniu ujemnym, np. do punktu  $K_1$ , jeżeli w czasie przeskoku wystąpi pewne obniżenie wartości siły  $P$ . Część krzywej obrazującej zachowania kraty Misesa między punktem  $A$  oraz punktem  $M$  (minimum lokalne) odpowiada położeniom niestatecznym. Zatem odcinki krzywej odpowiadające położeniom statecznym to odcinek  $OA$  oraz  $MC-W$ .

Cechą charakterystyczną utraty stateczności wskutek przeskoku jest gwałtowność tego procesu, tj. przejścia do odległego położenia równowagi konstrukcji. Badania eksperymentalne stateczności powłok, np. promieniowo ściskanych, wskazują, że jeżeli w nowym położeniu równowagi (po przeskoku) nie wystąpią odkształcenia plastyczne, wówczas przy zmniejszaniu obciążenia może wystąpić powrót do stanu pierwotnego przed przeskokiem lub po całkowitym odciążeniu do stanu pierwotnego. (Jeden z autorów formułuje powyższy pogląd na podstawie danych z literatury, ale także na podstawie prowadzonych przez siebie eksperymentów ze stalową powłoką walcową hydrostatycznie ściskaną, wykonywanych na zamówienie przemysłu chemicznego w Instytucie Mechaniki i PKM Politechniki Krakowskiej, w których taki powrót sprężysty w formie przeskoku obserwowano).

### 9.3.1. CHARAKTERYSTYKA STANOWISKA BADAWCZEGO KRATY MISESA

Wykres obrazujący zależność między siłą  $P$  i przemieszczeniem węzła  $O$  można uzyskać eksperymentalnie, jednak ze względu na gwałtowny charakter przeskoku konieczne jest stosowanie wymuszenia kinematycznego, które uniemożliwi wystąpienie gwałtownego przeskoku, ale także nie modeluje zachowania kraty Misesa. W konstrukcji stanowiska badawczego zastosowano zatem wymuszenie kinema-

tyczne węzła  $O$ . Do wymuszania kinematycznego węzła  $O$  stosuje się śrubę pociągową o znanym skoku związaną z tym węzłem łączącym pręty kraty. Do realizacji koniecznego w eksperymencie pomiaru siły  $P$  wystarczy związać węzeł łączący pręty kratownicy z czujnikiem siły. W czasie eksperymentu rejestruje się przemieszczenia węzła  $O$  oraz wartości siły mierzonej czujnikiem. Wymuszenie kinematyczne pozwala na uzyskanie pełnego obrazu krzywej, również z odcinkiem niestateczności układu wykreślonym na rys. 9.7 linią przerywaną.



Rys. 9.8. Schemat stanowiska badawczego do wyznaczenia krzywej stanów równowagi kraty Misesa

#### 9.4. NIEKLASYCZNE SCHEMATY ZNISZCZENIA KONSTRUKCJI WSKUTEK LOKALNEJ UTRATY STATECZNOŚCI

Tematem rozważań tego punktu jest prezentacja schematów zniszczenia wskutek niespodziewanego wystąpienia utraty stateczności ścianek prętów o przekrojach kołowo-symetrycznych. Tego typu problemy mogą wystąpić jako niespodziewany schemat zniszczenia będący nieoczekiwanym skutkiem optymalizacji wspomnianych przekrojów. Funkcjonuje bowiem przekonanie, że cienkościennie przekroje kołowo-symetryczne mają korzystny stosunek sztywności do masy, która maleje przy zmniejszaniu grubości ścianki. Jest to oczywiście prawda, o ile rozpatruje się klasyczny warunek bezpieczeństwa  $\sigma_{red} \leq k_r$ . Warunek ten nie posiada jednak nieograniczonego zakresu ważności i jego stosowanie ma sens aż do wystąpienia innego schematu zniszczenia, np. lokalnej utraty stateczności ścianki pręta, która jest zazwyczaj równoznaczna ze zniszczeniem elementu, mimo nieprzekroczenia naprężeń dopuszczalnych, a także często uszkodzenia całej konstrukcji. Uwzględnianie schematu zniszczenia przez utratę stateczności standardowo kojarzone jest z innymi przypadkami konstrukcyjnymi. Należy również zwrócić uwagę, że przy wykonywaniu obliczeń wytrzymałościowych metodą elementów skończonych nie otrzymamy sygnału o konieczności uruchomienia procedury weryfikacji stateczności. To jest zadanie prowadzącego obliczenia i kierownika projektu.

Aby ułatwić Czytelnikom uniknięcie takich przykrych niespodzianek, autorzy postanowili omówić dwa dość częste przypadki elementów konstrukcyjnych wraz

liwych na te nieklasyczne schematy zniszczenia, mimo braku klasycznych cech obciążenia wskazujących na zagrożenie utratą stateczności, w tym przypadku lokalnej utraty stateczności ścianki.

Te dwa przykłady to pręt o cienkościennym przekroju kołowo-symetrycznym (powłoka walcowa kolistą) poddany skręcaniu oraz analogiczny pręt poddany zginaniu czystemu lub zginaniu poprzecznemu. Zrezygnowano z obszerniejszego omówienia problematyki stateczności klasycznej konstrukcji powłokowych ze względu na stopień trudności oraz obszerny zakres prezentacji tej problematyki w licznych publikacjach. Na oba wymienione nietypowe schematy zniszczenia zwrócono wcześniej uwagę w rozdziale o wytrzymałości złożonej konstrukcji prętowych. Autorzy mają świadomość, że takich nieklasycznych schematów zniszczenia może być znacznie więcej. Te dwa przypadki należy zatem traktować jako przykładowe wskazanie na potrzebę wszechstronnej analizy „**możliwych schematów zniszczenia**”.

Prezentacja tych nieklasycznych zagadnień obejmie w pierwszej kolejności przypadku utraty stateczności powłok walcowych kolistych poddanych obciążeniu momentem skręcającym z pokazaniem sąsiednich postaci równowagi oraz wartościami górnego obciążenia krytycznego. Wyniki obliczeń MES przedstawiono na rys. 9.9, od a do f, i omówiono poniżej. W analizowanych przypadkach utraty stateczności przy skręcaniu przyjęto wymiary powłoki: promień  $R = 100$  mm oraz grubość ścianki  $h = 2$  mm.

Wyniki analiz stateczności powłok walcowych obciążonych momentem skręcającym, pokazane na rys. 9.9a–f, wskazują jednoznacznie na zależność formy odkształconej powłoki przy obciążeniu krytycznym od stosunku długości powłoki do promienia. Wraz ze wzrostem tego parametru maleje liczba półfal powierzchni środkowej powłoki; maleje również wartość obciążenia krytycznego. Dla przypadku powłoki długiej zacytowano w rozdziale 6 za A.S. Wolmirem wzór na moment krytyczny  $M_{kr}$ , wyprowadzony analitycznie dla powłoki długiej o wartości stosunku  $L/R$  około 100 (według R.G. Sturma [3]), w postaci przytoczonej przez A.S. Wolmira:

$$\bar{M}_{kr} = 0,508 \cdot \pi \cdot E \cdot h^2 \cdot \sqrt{h \cdot R} \cong 1,805 \cdot 10^7 [\text{Nmm}] \quad (9.45)$$

Analogiczna wartość momentu krytycznego wyznaczona z obliczeń MES dla powłoki o podobnej wartości ( $L/R = 100$ ) wynosi:

$M_{kr} = 1,875 \times 10^7 [\text{Nmm}]$ , co stanowi około 1,04  $\bar{M}_{kr}$ , tj. wartości uzyskanej teoretycznie.

Jak widać, oba uzyskane różnymi metodami wyniki dla momentu krytycznego są bardzo zbliżone.

Przegląd wyników MES pokazanych na rys. 9.9a wskazuje, że dla stosunku  $L/R = 100$  na obwodzie powłoki powstają dwie półfale, zgodnie z pracami [3] i [7], co potwierdza trafność analiz.

Obrazy deformacji dla wartości górnych obciążeń krytycznych w powłokach o mniejszych wartościach stosunku  $L/R$  pokazano poniżej na rysunkach od 9.9b do 9.9f.



Dla powłoki o  $L/R = 20$  (rys. 9.9b) występują 3 półfale przy wartości obciążenia  $3,4463 \times 10^7$  [Nmm];

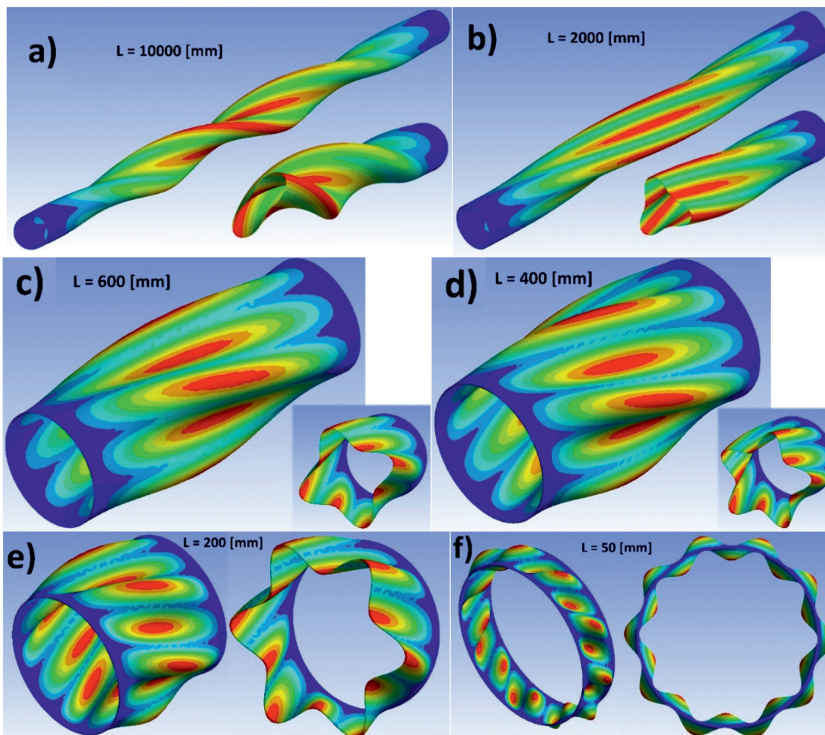
Dla powłoki o  $L/R = 6$  (rys. 9.9c) występują 4 półfale przy wartości obciążenia  $6,1153 \times 10^7$  [Nmm];

Dla powłoki o  $L/R = 4$  (rys. 9.9d) występuje 5 półfal przy wartości obciążenia  $7,3022 \times 10^7$  [Nmm];

Dla powłoki o  $L/R = 2$  (rys. 9.9e) występuje 6 półfal przy wartości obciążenia  $1,0744 \times 10^8$  [Nmm];

Dla powłoki o  $L/R = 0,5$  (rys. 9.9f) występuje 10 półfal przy wartości obciążenia  $3,7694 \times 10^8$  [Nmm].

Jak widać z przytoczonego wyżej zestawienia, liczba półfal na obwodzie oraz odpowiadająca im wartość obciążenia wzrastają ze zmniejszaniem się stosunku  $L/R$ , czyli długości powłoki. Kąt nachylenia wypukłości i wklęsłości powierzchni środkowej wzrasta wraz ze zmniejszaniem się stosunku długości powłoki do promienia jej powierzchni środkowej. Przytoczone obserwacje wyników MES wykazują dobrą zgodność z wnioskami wynikającymi z wykresów R.G. Sturma zamieszczonych w pracach [3] oraz [7].



Rys. 9.9. Obrazy deformacji dla wartości górnych obciążeń krytycznych w powłokach o stosunku  $L/R$  różnym: a) 100, b) 20, c) 6, d) 4, e) 2, f) 0,5

Do zobrazowania zagrożeń, jakie mogą być skutkiem pominięcia w analizie warunku stateczności, przedstawiono poniżej przykład. Analizie wytrzymałościowej podlega skręcana powłoka walcowa kolistą o przekroju pierścieniowym i średnicach 100/98 mm, czyli o grubości ścianki  $h = 1$  mm. Długość pręta  $100 \times R = 5000$  mm; ze względu na znany wzór analityczny na wartość momentu krytycznego  $M_{kr}$  wg (9.45) i możliwości konfrontacji z wynikami MES.

Klasyczny warunek bezpieczeństwa  $\tau_{\max} \leq \tau_{dop}$ .

Założono:  $R_{0,2} = 500$  MPa oraz  $x = 1,8$ .

Uwzględniając związek  $\tau_{dop}$  z  $\sigma_{dop}$ , otrzymuje się:

$$\tau_{dop} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{R_{0,2}}{1,8} = 160,6 \text{ MPa}$$

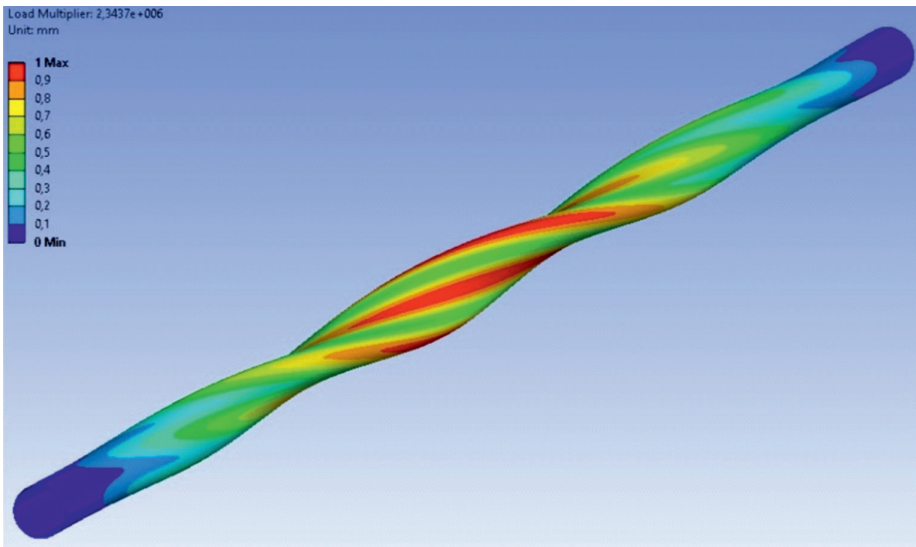
Wskaźnik skręcania wynosi  $W_0 = 15243 \text{ mm}^3$ , zatem:

$$M_{dop} = W_0 \times \tau_{dop} = 15243 \times 160,6 = 2,447 \times 10^6 \text{ [Nmm]}$$

Analitycznie wyznaczamy  $M_{kr}$  z zależności (9.45):

$$M_{kr} = 0,508 \cdot \pi \cdot E \cdot h^2 \cdot \sqrt{h \cdot R} = 2,256 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

Obliczona wartość  $M_{kr}$  jest kresem górnym dla takiego pręta i jej przekroczenie prowadzi w zasadzie do utraty stateczności. Moment krytyczny wyznaczony przy wykorzystaniu systemu ANSYS dla rozwiązywanego pręta wynosi  $2,344 \times 10^6 \text{ [Nmm]}$ .



Rys. 9.10. Obraz deformacji skręcaniej powłoki o przekroju pierścieniowym ( $d_{zew} = 100$  mm,  $h = 1$  mm,  $L = 5000$  mm)



Wartości momentów krytycznych, mimo iż są kresami górnymi, zatem bez uwzględnienia współczynników bezpieczeństwa, i tak są niższe od wartości  $M_{dop}$  (współczynnik bezpieczeństwa  $x = 1,8$ ). Przy wprowadzeniu współczynnika bezpieczeństwa do wartości momentów krytycznych różnica między  $M_{kr}$  a  $M_{dop}$  będzie jeszcze większa. Wskazuje to, że prawidłowy jest **warunek bezpieczeństwa** wynikający z **warunku stateczności**.

Drugim wariantem obciążenia powłoki, np. walcowej, nawiązującym do poprzednich rozdziałów, jest przypadek zginania. Przypadek zginania można traktować jako dwa odrębne zagadnienia różniące się stanem naprężenia, a mianowicie: zginanie czyste oraz zginanie poprzeczne. Zginanie poprzeczne jest przypadkiem znacznie częściej spotykanym w praktyce konstrukcyjnej i temu przypadkowi poświęcono więcej uwagi, przy czym zginania czystego jednak nie pominięto jako podstawowego przypadku wytrzymałościowego.

W dalszym ciągu tego uzupełnienia rozważano zagadnienia stateczności powłoki walcowej w przypadku zginania poprzecznego na przykładzie powłoki o zmiennej długości jednym końcem utwierdzonej i obciążonej siłą poprzeczną na końcu swobodnym (rys. 9.11a–f) oraz powłoki walcowej podpartej przegubowo na obu końcach i obciążonej siłami w dwóch przekrojach umieszczonych symetrycznie z możliwościami zmian wymiarów. Schemat podstawowy tego drugiego modelu obliczeniowego pokazano na rys. 9.12a i nazwano „zginanie czteropunktowe”. Ten schemat stwarza duże możliwości sterowania proporcjami między zginaniem czystym, między siłami, zginaniem poprzecznym przy stałej sile poprzecznej i zmiennym momencie zginającym w odcinku między podporami oraz siłami obciążającymi. Większość analizowanych dalej zagadnień stateczności powłok walcowych kolistych dotyczyć będzie przypadków wytrzymałości złożonej zginania z udziałem siły poprzecznej, a także przypadków czystego zginania, co można obserwować dla schematu „zginania czteropunktowego”. W obydwu analizowanych przypadkach utraty stateczności przy zginaniu przyjęto wymiary powłoki: promień  $R = 100$  mm oraz grubość ścianki  $h = 2$  mm.

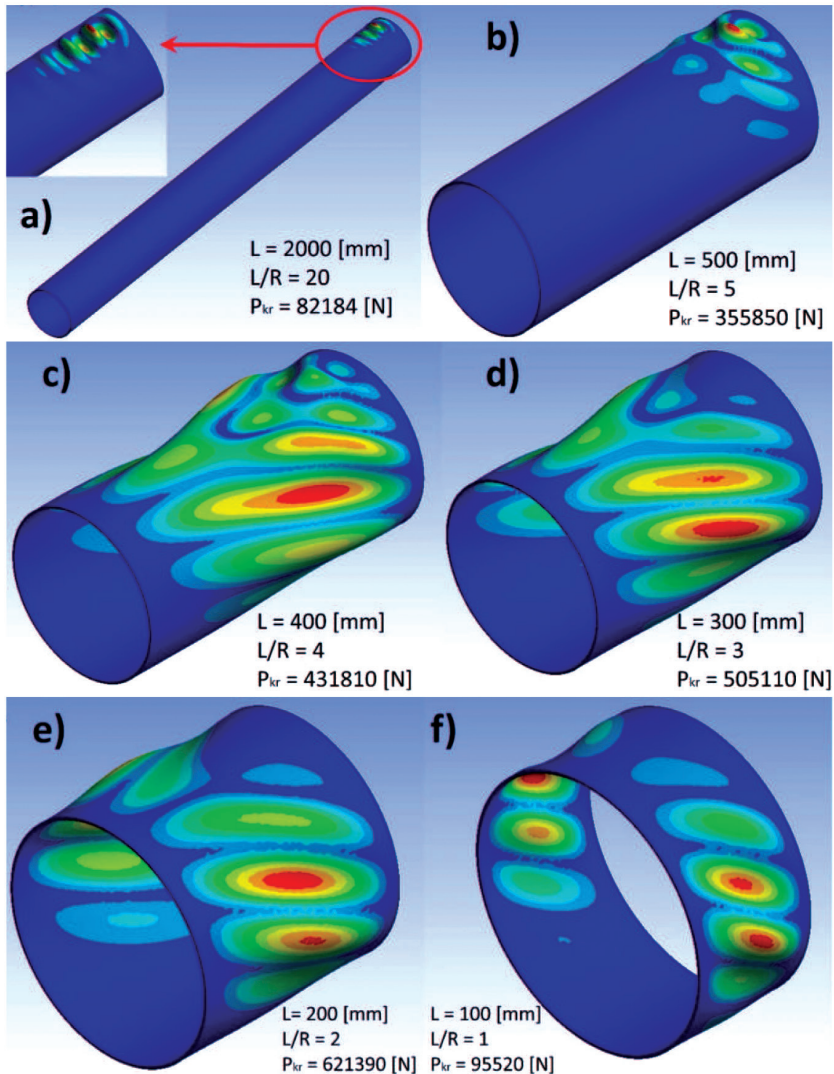
W przypadku pręta (powłoki), utwierdzonego na jednym końcu i obciążonego na końcu swobodnym siłą poprzeczną (prostopadłą do osi), zawsze występuje równoczesne działanie siły poprzecznej i momentu zginającego. Charakter utraty stateczności istotnie zależy od proporcji momentu zginającego  $M_{gmax}$  oraz siły poprzecznej  $T$ . Pewne proporcje między tymi dwiema wielkościami można regulować długością powłoki. Formy utraty stateczności tak obciążonego pręta (powłoki) wraz z wartościami obciążenia krytycznego dla różnych proporcji między długością  $L$  oraz promieniem powierzchni środkowej powłoki  $R$  pokazano na rys. 9.11a–f.

Dla powłoki dłuższej przy  $L/R = 20$  wypukłości oraz wklęsnięcia powłoki (o kierunkach prostopadłych do osi) pojawiają się w bezpośrednim sąsiedztwie przekroju utwierdzonego, w strefie bliskiej występowania  $M_{gmax}$ , i obejmują niewielki odcinek powłoki. Na dominującej części powłoki brak śladów wskazujących na pojawienie się nowej postaci, czyli utratę stateczności – rys. 9.11a.

Dla powłoki o proporcjach wymiarowych  $L/R = 5$  w strefie maksymalnego zginania pojawiają się dodatkowo „zarodki” wybrzuszeń o kierunku ukośnym do osi

powłoki zlokalizowane w pobliżu powierzchni obojętnej zginania, co wskazuje na skutek działania naprężeń stycznych od siły poprzecznej – rys. 9.11b.

Dla powłoki o proporcjach wymiarowych  $L/R = 4$  w strefie maksymalnego zginania zanika dominacja wybrzuszeń o kierunku prostym do osi powłoki w strefie  $\sigma_{gmax}$ , natomiast pojawiają się wypukłości o kierunkach nachylonych do tworzącej w pobliżu powierzchni obojętnej zginania, przypominające kształtem wypukłości charakterystyczne dla utraty stateczności przy skręcaniu, co wskazuje na wpływ naprężeń stycznych – rys. 9.11c.



Rys. 9.11. Obrazy deformacji powłoki o przekroju pierścieniowym poddanej zginaniu poprzecznemu dla różnych długości

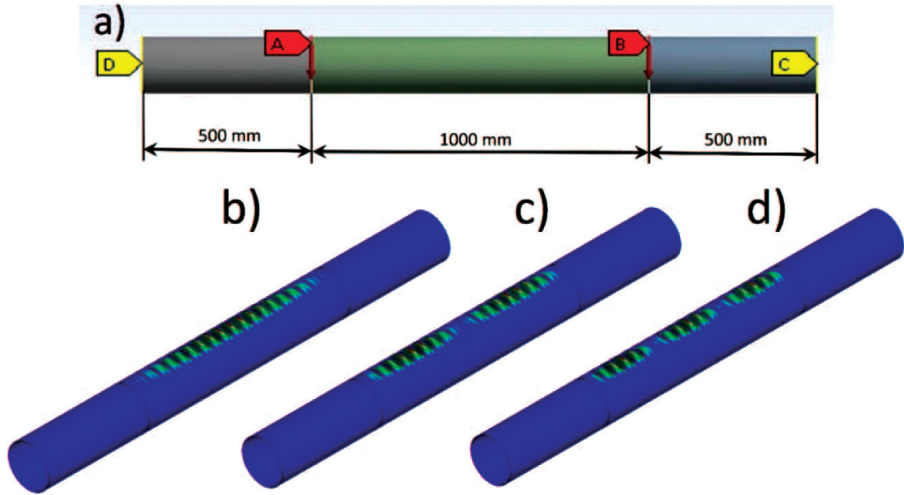
Dla powłoki o proporcjach wymiarowych  $L/R = 3$  w strefie maksymalnego zginania zanikają wypukłości charakterystyczne przy dominacji zginania, natomiast wyraźniej widoczne są wybrzuszenia w strefach maksymalnych naprężeń stycznych od siły poprzecznej w pobliżu strefy działania tych naprężeń, tj. przy powierzchni obojętnej zginania – rys. 9.11d.

Przy jeszcze mniejszych długościach powłoki (dla  $L/R = 2$  oraz  $L/R = 1$ ) obrazy wypukłości w strefie maksymalnych naprężeń stycznych od siły poprzecznej (tj. przy pow. obojętnej) są bardzo podobne do wypukłości charakterystycznych przy utracie stateczności przy czystym skręcaniu powłoki walcowej kolistej – rys. 9.11e oraz 9.11f.

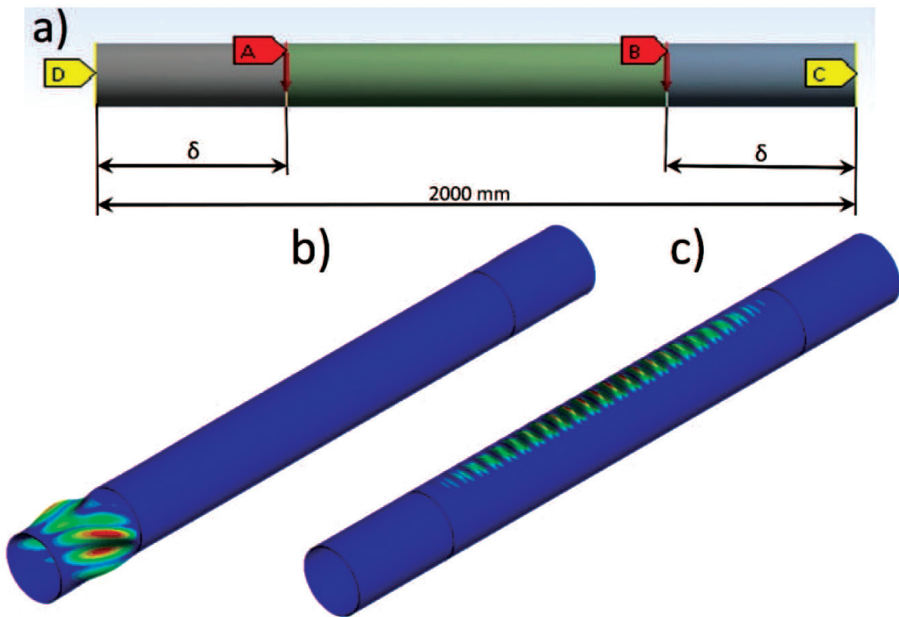
W celu poszerzenia obserwacji jeszcze innych możliwych schematów utraty stateczności powłok walcowych kolistych poddanych działaniu momentu zginającego wraz z siłą poprzeczną oraz przypadku czystego zginania rozpatrzono powłokę walcową podpartą na obu końcach przegubowo i obciążoną dwiema symetrycznie umieszczonymi siłami – rys. 9.12a. Zmieniając w kolejnych analizach długość powłoki oraz rozstaw sił obciążających przy zachowaniu ich symetrycznego położenia, można prowadzić obserwacje utraty stateczności w warunkach czystego zginania w odcinku między siłami oraz zginania poprzecznego w skrajnych odcinkach powłoki. Realizacja proporcji momentu zginającego oraz sił poprzecznych jest w tym schemacie stosunkowo prosta przez zmianę długości powłoki oraz odległości między siłami, co ułatwia realizację eksperymentów numerycznych.

Dla całkowitej długości 2000 [mm] i odległości między siłami 1000 [mm], przy średnicy powłoki 200 [mm], w odcinku środkowym (między siłami) realizowany jest przypadek czystego zginania. W warunkach obciążenia krytycznego w strefie czystego zginania obserwuje się trzy różne formy utraty stateczności przy bardzo bliskich wartościach sił krytycznych. Dla obciążenia  $P_{k1} = 308\,090$  [N] wystąpiła jednoczęściowa strefa wybrzuszeń naprzemiennych z wklęsłościami na prawie całej długości strefy  $M_g = \text{const}$  – rys. 9.12b, natomiast przy nieco większej sile pojawiła się inna forma sąsiedniej postaci, mianowicie złożonej z dwóch odcinków o charakterze podobnym do poprzedniej, ale o dwukrotnie mniejszej długości, co przedstawiono na rys. 9.12c. Wartość drugiej siły krytycznej wynosi 308 920 [N], jest o 0,27% większa od pierwszej. Wartość trzeciej siły krytycznej wynosi 310 280 [N] (i jest większa o 0,71% od siły pierwszej oraz o 0,44% od drugiej siły krytycznej), natomiast forma odpowiadająca trzeciej wartości siły krytycznej przedstawia trzy odcinki podobne do poprzednich dwóch o odpowiednio mniejszej długości – rys. 9.12d. W prezentowanych przypadkach kierunki wybrzuszeń są prostopadłe do osi powłoki.

Przy tak znikomych różnicach sił odpowiadających pokazanym trzem formom utraty stateczności w warunkach badań eksperymentalnych możliwe jest pojawianie się skokowej zmiany postaci równowagi, co było wcześniej obserwowane w badaniach doświadczalnych innych powłok i rejestrowane szybką kamerą (lata 70. – prof. Esslinger, RFN).



Rys. 9.12. Schemat zginania czteropunktowego (a) oraz formy utraty stateczności przy: b) pierwszej, c) drugiej, d) trzeciej wartości siły krytycznej



Rys. 9.13. Schemat zginania czteropunktowego (a) oraz formy utraty stateczności dla  $\delta$  równego 300 mm (b) i 350 mm (c)

Po dokonaniu ograniczenia całkowitej długości powłoki i zmniejszeniu odcinka (rys. 9.13a), w którym występuje czyste zginanie, charakter utraty stateczności uległ istotnej zmianie. Korekta wymiarów bez zmiany „wartości sił” wywołała obniżenie wartości momentu zginającego bez równoczesnej zmiany „wartości siły” poprzecz-

nej, powodując jej dominację. Odpowiednie obrazy nowych form równowagi przedstawiono na rys. 9.13b, 9.13c. We wszystkich przedstawionych nowych formach równowagi obserwuje się istotny wpływ sił poprzecznych pełniących teraz dominującą rolę w obciążeniu, co skutkuje wyraźną dominacją naprężeń stycznych (od sił poprzecznych) w procesie wymuszania utraty stateczności (rys. 9.13b). Kształt nowej postaci równowagi powłoki przypomina przypadek skręcania, przy czym wybrzuszenia i wklęsłości lokalizują się w strefie powierzchni obojętnej zginania, czyli w strefie ekstremum naprężeń stycznych. O utracie stateczności decydują zatem siły poprzeczne przy pomijalnym udziale momentu zginającego.

Przeprowadzone w końcowej części rozdziału analizy stateczności pozwoliły na pokazanie zjawisk utraty stateczności w przypadkach wytrzymałości złożonej, w szczególności dla równoczesnego działania momentu zginającego oraz siły poprzecznej o zmiennych proporcjach. W zaprezentowanej analizie pokazano proces „ciągłych” zmian charakteru utraty stateczności od charakterystycznego dla czystego zginania (9.12b, c, d oraz 9.13c), przez stany pośrednie ze wzrastającą rolą siły poprzecznej (naprężeń stycznych od ścinania), aż do skrajnego przypadku dominacji sił poprzecznych nad momentem zginającym (rys. 9.13b). W tym ostatnim przypadku charakter utraty stateczności staje się bardzo podobny, lokalnie, do obrazu utraty stateczności w warunkach czystego skręcania, w szczególności przypadki utraty stateczności skręcanych powłok o mniejszej długości pokazane np. na rys. 9.9c, d oraz e.

## LITERATURA

- [1] Flügge W., Powłoki, obliczenia statyczne, Arkady, Warszawa 1962.
- [2] Koiter W.T., Over de stabiliteit von het elastisch evenwicht, Amsterdam 1945; Elastic stability and postbuckling behaviour, Symposium on Non-Linear Problems, University of Wisconsin Press, 1963, p. 257, (W. Koiter, Ustojcziwost i zakriticzeskije powiedienije uprugich sistiem; Mechanika, IŁ Nr 5, 1960).
- [3] Sturm R.G., Stability of thin cylindrical shells in torsion. Proceedings American Society of Civil Engineers 73, Nr 4 (1947), 471–495.
- [4] Timoshenko S.P., Gere J.M., Teoria stateczności sprężystej. Wyd. „ARKADY”, Warszawa 1963.
- [5] Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S., Teoria płyt i powłok, Arkady, Warszawa 1962.
- [6] Timoshenko S.P.; Strength of materials, Part II, D. Van Nostrand, INC. Princeton, New Jersey. Ros. Sprotiwlenije Materialow, Izdatielstwo Nauka, Moskwa 1965.
- [7] Wolmir A.S., Ustojcziwost deformirujemych sistiem. Izd: Nauka, Moskwa 1967.

## ROZDZIAŁ 10

# ZAGADNIENIA WYTRZYMAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ METALI

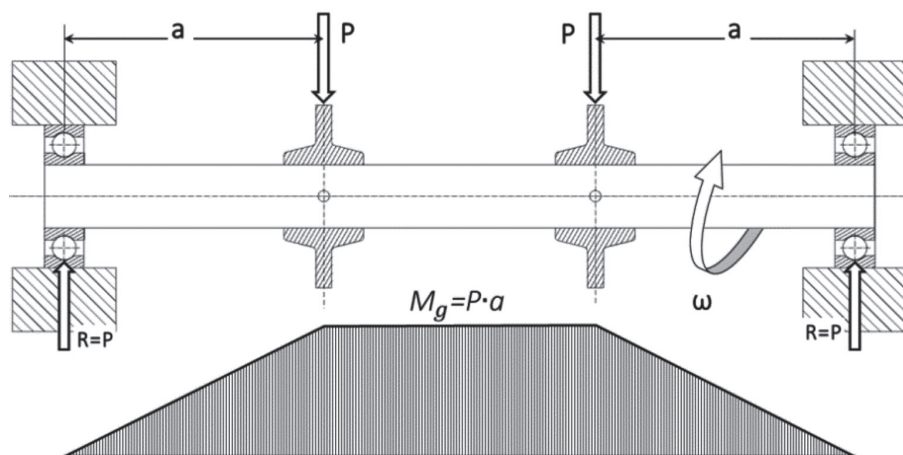
Stefan BUĆKO, Agnieszka CHOJNACKA-BROŻEK

### 10.1. WPROWADZENIE

Zmęczenie materiałów jest kolejnym po dekohezji, dużych odkształceniach plastycznych oraz utracie stateczności konstrukcji schematem zniszczenia konstrukcji charakterystycznym dla elementów metalowych poddanych obciążeniom zmiennym (często cyklicznie) w czasie. Cechą charakterystyczną obserwowanych „złomów” był i jest nadal ich, na większej części, kruchy charakter, również w elementach z materiałów wykazujących wyraźną granicę plastyczności, oraz gwałtowny (katastroficzny) przebieg. Nasilenie występowania tego typu zniszczeń związane było ze wzrostem liczby elementów konstrukcyjnych poddanych działaniu obciążeń zmiennych w czasie. Oczywiście elementy, które ulegały temu „nowemu” schematowi zniszczenia, były zaprojektowane zgodnie z ówczesnym stanem wiedzy i powszechnie przyjętymi wówczas kryteriami bezpieczeństwa. Jest to często spotykany przypadek w rozwoju techniki, kiedy rozwój technologii produkcji elementów konstrukcyjnych oraz materiałów wyprzedza doskonalenie metod obliczeń wytrzymałościowych i rozpoznanie schematów zniszczenia.

Użytkownicy w większości nie mogli rozpoznać zbliżającej się „katastrofy”, a prowadzone rejestry awarii z okresu XIX wieku wskazują, że wiele takich „złomów” dotyczyło elementów konstrukcji pojazdów szynowych, gdzie było wówczas szczególnie dużo elementów poddanych działaniu obciążeń cyklicznie zmiennych w czasie (rys. 10.1). Rozwój i upowszechnienie napędu parowego (statki, pojazdy szynowe, zakłady produkcyjne) prowadziły do lawinowego wzrostu liczby elementów maszyn poddanych działaniu obciążeń zmiennych w czasie. Spowodowało to, wobec braku skutecznych metod zabezpieczenia, narastanie liczby awarii i skłoniło menadżerów przemysłu i transportu do podjęcia badań nad mechanizmami zniszczenia, poszukiwania warunków bezpieczeństwa dla takich elementów oraz opracowania metod i standardów badań zmęczeniowych materiałów i konstrukcji. Trwałość elementów obciążonych cyklicznie była początkowo wyraźnie ograniczona, a złomy kruche i gwałtowne.



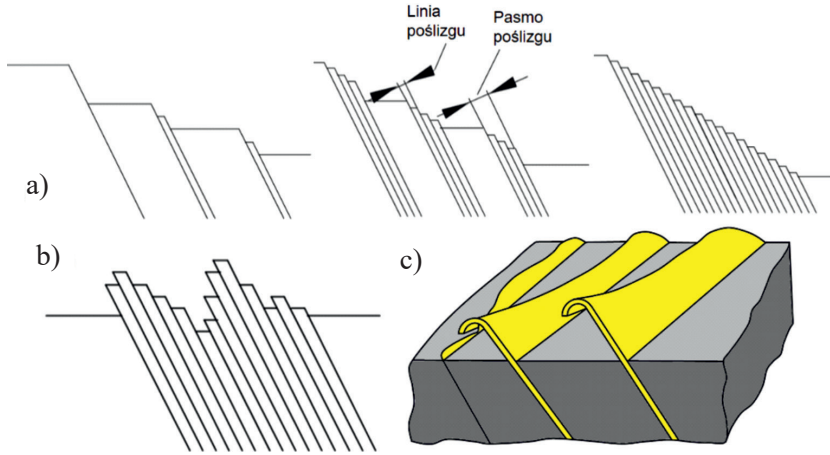


Rys. 10.1. Schemat statyczny obciążenia osi

Rozpoznanie mechanizmów powstawania złomów zmęczeniowych było bardzo trudne ze względu na niedoskonałość metod badawczych struktury metali. Istotnym utrudnieniem w tych badaniach był bardzo duży rozrzut wyników utrudniający zarówno planowanie badań, jak również metodologię opracowania wyników. Bardzo ważnym czynnikiem umożliwiającym rozpoznanie mechanizmów powstawania złomu zmęczeniowego był rozwój mikroskopii, który pozwolił rozpoznać ziarnistość struktury metali oraz dużą niejednorodność ułożenia ziarn. W nieco późniejszym czasie stwierdzono przypadkowość rozmieszczenia krystalitów w ziarnach. Przytoczone fakty pozwoliły na inne, nowe spojrzenie na reakcję rzeczywistej struktury metalu na działające naprężenia. Krótko można te wyniki podsumować tak, że rozpoczęła się odwrót od analizy modelu ciała jednorodnego, inaczej mówiąc „ośrodka ciągłego”. Udoskonalane ciągle mikroskopy i technika badań pokazały, że przy stosunkowo niewielkich naprężeniach średnich w strefach osłabionej, przez większą niejednorodność, struktury występują niewielkie poślizgi plastyczne dodatkowo osłabiające strukturę metalu. Wspomniane zjawiska nie dają się pogodzić z modelem jednorodnego, izotropowego ośrodka ciągłego; rzeczywista struktura prawdziwego metalu reaguje na przyłożone obciążenia w sposób przypadkowy. Zauważono także różnicę między skutkami obciążeń statycznych oraz obciążeń cyklicznych, które w każdym kolejnym cyklu powodują powiększanie się nieciągłości spowodowanej poślizgami, w słabszej strefie. Stwierdzono bowiem, że poślizgi plastyczne nie zanikają po zakończeniu cyklu, a w kolejnym cyklu powiększają lub pogłębiają się, tworząc „wręby” w strukturze, a w konsekwencji mikroszczeliny oraz wypływy materiału nad powierzchnię elementu (rys. 10.2).

Miejsce uskoku jest, jak wspomniano, przypadkowe, leżące w słabszej strefie, często przy powierzchni elementu, gdyż ziarna przypowierzchniowe są słabsze, ponieważ jedna powierzchnia jest swobodna i podatna przez to bardziej na poślizgi

plastyczne. Warto tutaj może pokazać, że prowadzone wspólnie badania stali z niestatecznością materiałową (np. prace Zespołu Instytutu Mechaniki Stosowanej [3, 6, 12]) wykazały, że w quasi-jednorodnym formalnie stanie naprężenia w rozciąganej próbce poślizgi plastyczne nie zachodzą równocześnie na całej długości próbki. Badania wykazały, że przy naprężeniu bliskim lub równym granicy plastyczności strefa lub strefy „poślizgów plastycznych” rozpoczynają się w jednym lub kilku przypadkowych miejscach próbki i propagują się wzdłuż jej długości.

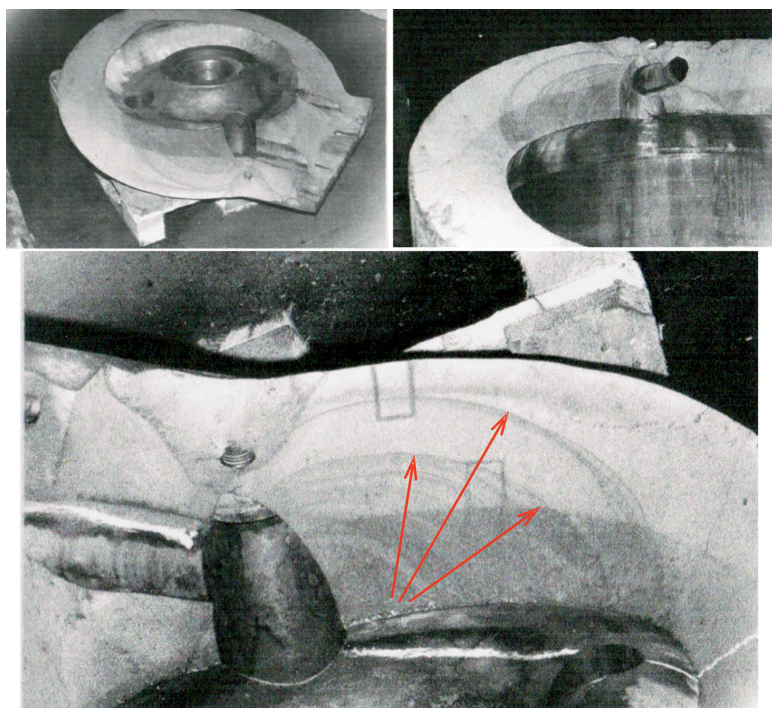


Rys. 10.2. Schematyczny: przekrój układu linii poślizgów w pasmach wywołanych obciążeniem zmiennym (a) i (b), wygląd ekstruzji (c)

W rezultacie niezaniakających, przy zmianie obciążenia, poślizgów plastycznych w strukturze elementu pojawiają się mikroszczeliny, dodatkowo osłabiające słabszą już strefę. Wraz ze wzrostem liczby cykli obciążenia rozmiary mikroszczeliny powiększają się aż do stworzenia warunków do koncentracji naprężeń na czole szczeliny. Od tego stanu następuje zmiana stanu naprężenia na czole szczeliny i często zmiana kierunku propagacji nieciągłości. Dalszy przebieg procesu powstawania złomu zmęczeniowego jest już klasycznym procesem propagacji szczeliny, w którym przy cyklicznej zmianie naprężeń dochodzi do kontaktu obu powierzchni szczeliny, skutkującego wygładzeniem obu powierzchni szczeliny. Wynikiem tego procesu są wygładzone części powierzchni złomów zmęczeniowych, często ze śladami miejsc zatrzymania się szczeliny wskutek np. przerwy w eksploatacji urządzenia. Ogólnie ocenia się, że ponad 50% czasu trwałości elementu obciążonego cyklicznie jest czasem propagacji szczeliny. Równocześnie wyniki pierwszych w miarę systematycznych badań wykazały, że rozrzut wyników badań (trwałość próbek do zniszczenia przy tych samych obciążeniach) jest bardzo duży. Często liczby cykli do zniszczenia dla próbek z tego samego metalu różnią się o rząd lub nawet o dwa rzędy wielkości. Wskazuje to na konieczność starannego wykonywania próbek do badań oraz konieczność statystycznego opracowania wyników.



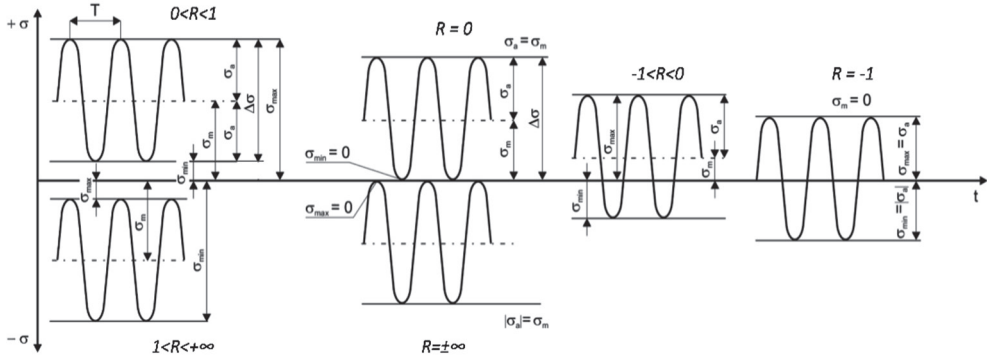
Pierwszym badaczem, który przeprowadził usystematyzowane badania trwałości zmęczeniowej elementów metalowych (głównie stalowych), był Wöhler. Na podstawie wyników bardzo obszernych eksperymentów opracowanych z wykorzystaniem rachunku prawdopodobieństwa sporządził wykres zależności liczby cykli do zniszczenia próbki od wartości działającego naprężenia o ustalonej charakterystyce.



Rys. 10.3. Fotografie przedstawiają powierzchnie pęknięcia cylindra prasy hydraulicznej o nacisku 12 [MN]; grubość ścianki ~ 180 [mm]. Widoczne są ślady pozostawione przez czoło szczeliny przy przerwach w propagacji. Strzałki wskazują kierunek rozwoju pęknięcia od źródła przy karbie, gdzie badania wykazały wadę materiału odlewu

## 10.2. PRZYBLIŻONA ANALIZA ILOŚCIOWA ZJAWISK PRZY ZNISZCZENIACH ZMĘCZENIOWYCH

Przed rozpoczęciem choćby przybliżonej analizy ilościowej zjawisk towarzyszących zniszczeniu zmęczeniowemu konieczne jest uporządkowanie klasyfikacji przebiegu cykli zmiany naprężeń. Do uogólnionej analizy przyjmuje się dość powszechnie sinusoidalne przebiegi zmian naprężeń w czasie. Dla takich przebiegów podstawowe znaczenie mają wartości skrajne naprężeń, tj.  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  lub  $\tau_{\max}$ ,  $\tau_{\min}$ . Badania wykazały, że w bardzo dużym zakresie częstotliwości jej wartość nie ma istotnego wpływu na trwałość zmęczeniową elementu (próbki).



Rys. 10.4. Zestaw rysunków przedstawiających typowe przebiegi cykli naprężeń

Przy pominięciu częstotliwości charakter cyklu może być opisany przez wartości  $\sigma_{\max}$  oraz  $\sigma_{\min}$ . Wprowadzono zatem jako miernik charakteru cyklu wielkość nazwaną „współczynnikiem asymetrii cyklu” wg zależności pokazanej poniżej:

$$\kappa = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \text{ lub } \kappa = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \quad (10.1)$$

Przy  $\kappa = 0$  mamy cykl pulsujący odzerowo, natomiast  $\kappa = -1$  określa tzw. cykl symetryczny.

Analogicznie nazywana oraz definiowana wielkość, tj. „współczynnik asymetrii cyklu”, oznaczana jest także w niektórych źródłach jako  $R$ .

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} \text{ lub } R = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} \quad (10.1a)$$

Przy  $R = 0$  jest także cykl pulsujący odzerowo: dla  $R = -1$  cykl określany jest jako symetryczny.

Wartości współczynników asymetrii cyklu dla wykresów na rys. 10.4 podano przy rysunkach. Cykle o jednakowej wartości  $\kappa$  lub  $R$  nazywane są podobnymi.

Dodatkowo wprowadzono dwie bardzo ważne wielkości charakterystyczne, a mianowicie:

$$\sigma_m = \frac{1}{2}(\sigma_{\min} + \sigma_{\max}) \text{ – naprężenie średnie cyklu} \quad (10.2)$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \text{ – amplituda naprężenia} \quad (10.3)$$

Badania zmierzające do ilościowej oceny wytrzymałości (trwałości) zmęzeniowej prowadzone są dla wybranej wartości współczynnika asymetrii cyklu. Wykres Wöhlera budowany jest w układzie współrzędnych: oś odciętych – liczba cykli do zniszczenia próbki przy założonym  $\kappa$  lub ( $R$ ) oraz  $\sigma_{\max}$ , rzędna – maksymalna war-

tość  $\sigma_{\max}$  przy ustalonym  $\kappa$  (lub  $R$ ). Ze względu na rozpiętość trwałości badanych próbek, na osi odciętych nanosi się nie liczbę cykli „ $N$ ”, lecz „ $\log N$ ”.

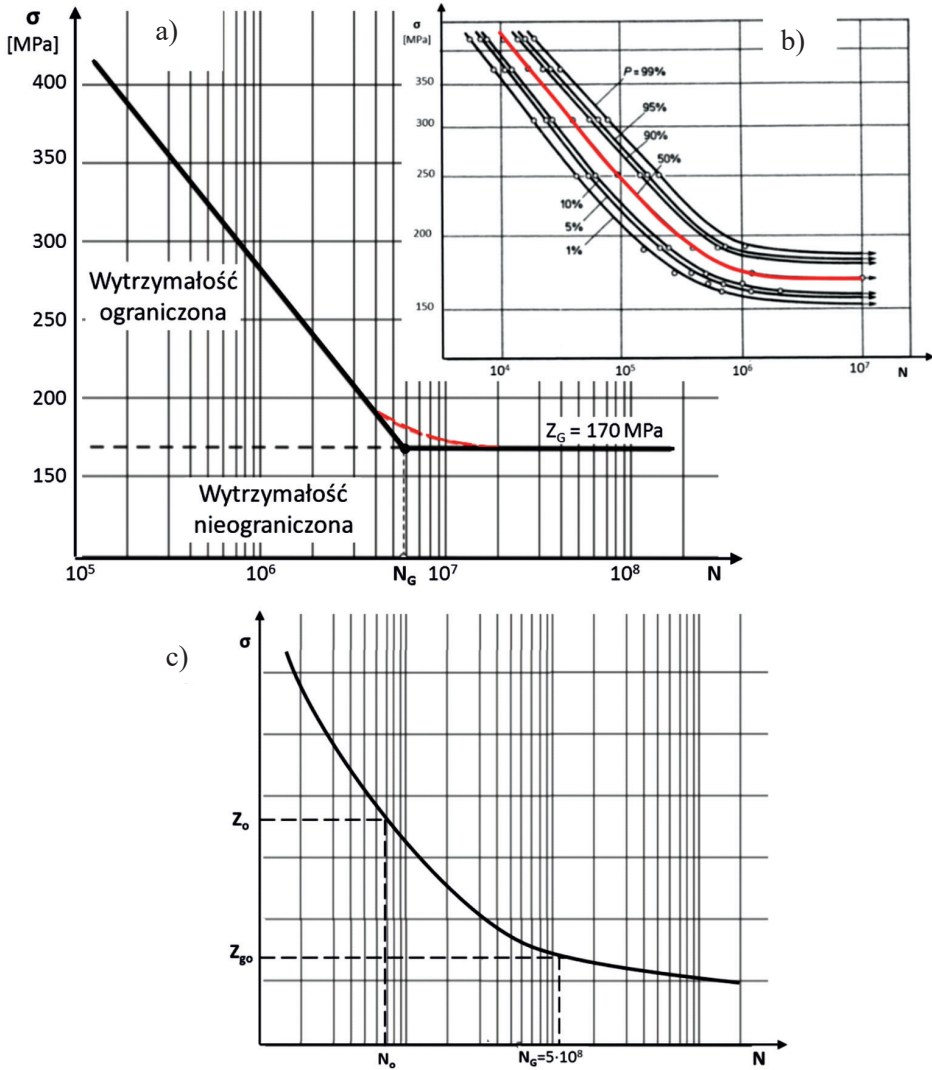
Dla stali „krzywa Wöhlera” składa się z dwóch odcinków linii prostej połączonych krótkim łukiem krzywej, co pokazano na rys. 10.5a. Lewa część (lewy odcinek) krzywej Wöhlera bywa dzielony na trzy przedziały, a mianowicie: obszar wytrzymałości quasi-statycznej do około  $10^3 \div 10^4$  cykli; obszar wytrzymałości niskocyklowej  $10^4 \div 10^5$  oraz obszar wytrzymałości wysokocyklowej przy liczbie cykli  $>10^5$ ; przy czym w pierwszych dwóch przedziałach mogą wystąpić odkształcenia plastyczne. Przykładowy wykres Wöhlera dla stopów lekkich pokazano na rys. 10.5c, gdzie widoczny jest brak odcinka prostej poziomej po przekroczeniu tzw. granicznej liczby cykli.

Przebieg klasycznego wykresu Wöhlera dla stali wskazuje, że możliwy jest dobór takiej wartości naprężenia  $\sigma_{\max}$ , która może być powtórzona przez bardzo dużą liczbę cykli bez wystąpienia śladów zniszczenia próbki. Na tej podstawie formułuje się opinię o istnieniu tak zwanej „nieograniczonej trwałości zmęczeniowej”, czyli o istnieniu takiej wartości  $\sigma_{\max}$ , która może być powtórzona przez nieskończenie wielką liczbę cykli. Na podstawie długotrwałych obserwacji zachowań próbek stalowych ustalono tzw. „graniczną liczbę cykli”, oznaczaną „ $N_G$ ”, po przekroczeniu której można oczekiwać nieograniczonej trwałości zmęczeniowej. Współcześnie dla stali i staliw przyjmuje się często  $N_G$  równe  $10^7$  cykli, chociaż można spotkać również wartość  $N_G$  równą  $5 \times 10^7$  cykli, kilkadziesiąt lat wcześniej przyjmowano wartość  $N_G$  jako np.  $5 \times 10^6$  cykli.

Krzywa Wöhlera dla stopów lekkich ma przebieg odmienny niż dla stali, a mianowicie nie posiada odcinka prostej poziomej, lecz odcinek linii krzywej zbliżonej do prostej o ujemnym, chociaż mniejszym, kącie pochylecia. Oznacza to, że dla stopów lekkich nie można mówić o nieograniczonej trwałości zmęczeniowej. Jest to przyczyną wprowadzenia znacząco większej wartości, w tym przypadku umownej, granicznej liczby cykli równej od  $5 \times 10^8$  cykli do nawet  $10^9$  cykli. Sporządzenie wykresu Wöhlera o wymaganej dokładności wymaga, ze względu na rozrzut wyników, przebadania (zniszczenia) kilkudziesięciu próbek – często powyżej pięćdziesięciu. W wielu przypadkach pozwala to na sporządzenie wykresu w formie „rodziny” krzywych Wöhlera o różnej wartości prawdopodobieństwa przetrwania określonych liczb cykli obciążenia – przykład na rys. 10.5b, gdyż nie wszystkie konstrukcje muszą cechować się nieograniczoną trwałością zmęczeniową. Bywają przypadki, gdy liczy się głównie masa oraz niezawodność, a możliwe jest założenie wymiany niektórych elementów lub zespołów konstrukcji po przepracowaniu założonej w projekcie liczby cykli obciążenia.

Ze względu na potrzeby praktyki obliczeniowej wykonuje się oczywiście badania do sporządzania krzywych Wöhlera dla różnych wartości współczynników asymetrii z uwzględnieniem wpływu naprężeń średnich oraz dla różnych przypadków wytrzymałościowych, jak również dla ważniejszych przypadków wytrzymałości złożonej.

Oddzielnym i zdecydowanie trudniejszym zadaniem jest opracowanie zasad formułowania „warunków bezpieczeństwa” dla złożonych stanów naprężenia (np. zginanie ze skręcaniem), w przypadku gdy cykle składowych obciążeń nie są synchroniczne.



Rys. 10.5. Standardowy wykres Wöhlera dla stali (a); krzywe Wöhlera o różnej wartości prawdopodobieństwa przetrwania (b); przykład wykresu Wöhlera dla stopów lekkich (c)

### 10.3. PRÓBA SFORMUŁOWANIA KRYTERIUM BEZPIECZEŃSTWA DLA ZŁOŻONYCH STANÓW NAPRĘŻENIA

Wyniki badań i analiz dla ustalenia „kryterium bezpieczeństwa” w najczęściej spotykanym tzw. „dwuwymiarowym (ewentualnie płaskim) stanie naprężenia zmierzają do przyjęcia kryterium bezpieczeństwa identycznego jak dla przypadków obciążeń statycznych. Należy jednak podkreślić, że w literaturze można spotkać również inne

koncepcje formułowania warunku (kryterium) bezpieczeństwa w złożonym stanie naprężenia. W ostatnich latach przeważa jednak pogląd o słuszności kryterium zasygnalizowanego powyżej; pogląd ten podtrzymywał prof. Z. Brzoska [2], ale również autorzy zagraniczni np. w pracy [15].

Dla przykładu, w przypadku materiałów ciągliwych proponuje się formułować warunek analogiczny do warunku wg hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego. Dla dwóch stanów naprężenia z cyklem symetrycznym (np.  $\sigma_{1a}, \sigma_{2a}$  oraz  $\bar{\sigma}_{1a}, \bar{\sigma}_{2a}$ ) pozwala sformułować wyrażenia na naprężenia „zredukowane”  $\sigma_{zr}$  w postaci:

$$\sigma_{zr} = \sqrt{\sigma_{1a}^2 - \sigma_{1a} \cdot \sigma_{2a} + \sigma_{2a}^2} \quad \text{oraz} \quad (10.4)$$

$$\bar{\sigma}_{zr} = \sqrt{\bar{\sigma}_{1a}^2 - \bar{\sigma}_{1a} \cdot \bar{\sigma}_{2a} + \bar{\sigma}_{2a}^2} \quad (10.5)$$

Te dwa stany naprężenia można uznać za jednakowo bezpieczne, jeżeli spełniają warunek równego bezpieczeństwa w postaci:

$$\sigma_{zr} = \bar{\sigma}_{zr} \quad (10.6)$$

Porównując te stany z prostym symetrycznym rozciąganiem ( $\sigma_m = 0$ ), dla którego trwała wytrzymałość zmęczeniowa oznaczana jest jako  $Z_{-1}$ , otrzymuje się zależność:

$$\sigma_{1a}^2 - \sigma_{1a} \cdot \sigma_{2a} + \sigma_{2a}^2 = Z_{-1}^2 \quad (10.7)$$

Analiza wyników oraz obserwacja badań wytrzymałości zmęczeniowej, a także analiza wyników eksploatacji i zniszczenia elementów maszyn wskazują na istotne znaczenie naprężeń średnich. Stwierdzono przy tym, że istotne znaczenie mają zarówno wartości, jak również zwroty (znaki) naprężeń średnich. W przypadku cyklu z rozciąganiem wprowadzenie dodatkowo dodatniego naprężenia średniego ( $\sigma_m > 0$ ) powoduje obniżenie wartości amplitudy odpowiadającej nieograniczonej trwałości zmęczeniowej. Wprowadzenie ujemnego naprężenia średniego ( $\sigma_m < 0$ ) powoduje zwiększenie wartości amplitudy odpowiadającej nieograniczonej trwałości zmęczeniowej. W myśl sformułowanej powyżej idei kryterium bezpieczeństwa można przez analogię zapisać warunek (kryterium) bezpieczeństwa dla cykli niesymetrycznych scharakteryzowanych naprężeniami ( $\sigma_{1a}$  i  $\sigma_{1m}$  oraz  $\sigma_{2a}$  i  $\sigma_{2m}$ ) w postaci:

$$\sqrt{\sigma_{1a}^2 - \sigma_{1a} \cdot \sigma_{2a} + \sigma_{2a}^2} = Z_{-1} - \chi \cdot (\sigma_{1m} + \sigma_{2m}), \quad \text{gdzie } \chi = \frac{2 \cdot Z_{-1}}{Z_0} - 1 \quad (10.8)$$

Powyższe rozumowanie przyjęto według pracy Z. Brzoski [2], chociaż podobne koncepcje można znaleźć także w innych publikacjach, np. [15]. Doświadczenia autorów z opracowań poawaryjnych wskazują na dobre wyniki takiej metodyki anali-



zy bezpieczeństwa konstrukcji pracujących przy obciążeniach cyklicznie zmiennych i złożonych stanach naprężenia.

Szczegółowe omówienie zasad obliczeń dla złożonych stanów naprężenia można znaleźć w podręczniku [8] lub w podręcznikach PKM, np. [7] i [14].

#### 10.4. CZYNNIKI WPŁYWAJĄCE NA WYTRZYMAŁOŚĆ ZMĘCZENIOWĄ ELEMENTÓW KONSTRUKCYJNYCH

Szczegółowa obserwacja oraz badania próbek po zniszczeniu, szczególnie po zniszczeniu przed przewidywanym czasem trwałości, dały wiele wskazówek dotyczących czynników wpływających na trwałość zmęczeniową. Szczególne znaczenie miały i mają nadal obserwacje oraz szczegółowe badania elementów konstrukcyjnych, które uległy zniszczeniu przed przewidywanym czasem trwałości. Badania te obejmowały często analizę struktury materiału przy powierzchni przelomu, a szczególnie w strefie inicjacji złomu zmęczeniowego. W rezultacie badań i analiz sformułowano listę wielu czynników mających zauważalny wpływ na trwałość zmęczeniową elementów konstrukcyjnych. Podstawowe czynniki wymieniono poniżej:

A. Czynniki obniżające trwałość zmęczeniową.

- A1. Koncentracja (spiętrzenie) naprężeń spowodowane rozwiązaniami konstrukcyjnymi.
- A2. Wpływ naprężeń „własnych” (odlewniczych i spawalniczych).
- A3. Wady materiałowe w postaci niejednorodności struktury lub wewnętrznych szczelin, co szczególnie często spotykane jest w odlewach.
- A4. Wpływ stanu powierzchni elementu konstrukcyjnego.
- A5. Wpływ wymiarów elementu konstrukcyjnego.

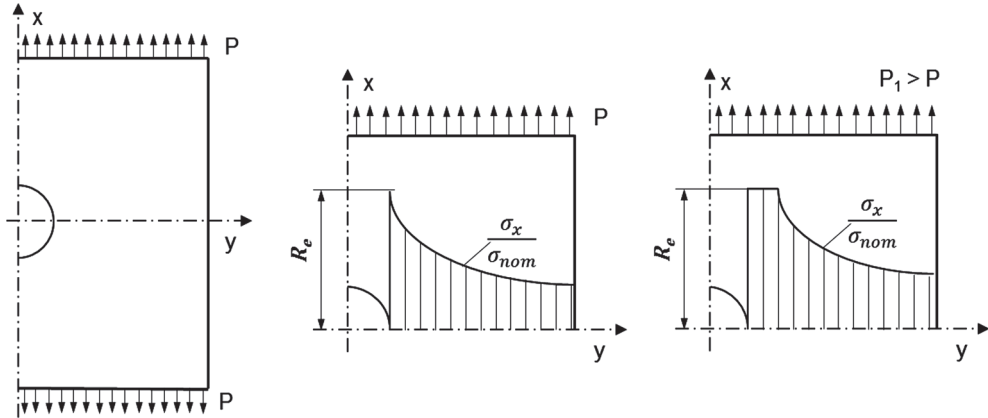
B. Technologiczne zabiegi podnoszące trwałość zmęczeniową.

- B1. Specjalna obróbka mechaniczna strefy powierzchniowej.
- B2. Specjalna obróbka cieplno-chemiczna strefy powierzchniowej dla podwyższenia trwałości zmęczeniowej.

##### **A1. Wpływ koncentracji (spiętrzenia) naprężeń**

Badania wskazują na istotny wpływ wartości naprężeń, również lokalnych, na inicjację pęknięć zmęczeniowych. Kształtowanie elementów konstrukcyjnych, w których nie byłoby niejednorodności w rozkładzie naprężeń, często nie jest możliwe ze względu na funkcje, które musi spełniać element konstrukcyjny. Występowanie karbów, tj. gwałtownych zmian przekroju elementów konstrukcyjnych, jest trudne do uniknięcia. Karby powodują spiętrzenia naprężeń, przy czym często wzrost lokalnego naprężenia jest duży, nawet kilkakrotny. W przypadku pracy przy obciążeniach statycznych skutki wynikające z istnienia karbów często są łagodzone przez zdolność materiału do odkształceń plastycznych, co pokazano poniżej na przykładzie płaskiej płytki z niewielkim otworem kołowym, poddanej rozciąganiu – rys. 10.6.

Stopień spiętrzenia naprężeń na brzegu małego otworu wynosi 3 (czyli trzykrotny wzrost maksymalnej wartości naprężenia w stosunku do wartości nominalnej  $\sigma_{nom}$  występującej dla płyty bez otworu).



Rys. 10.6. Schemat koncentracji naprężeń w rozciągającym płaskowniku z otworem

Przy wzrastającym obciążeniu dość wcześnie naprężenie  $\sigma_{max}$  osiągnie wartość  $R_e$  (wyraźnej granicy plastyczności) i pojawią się odkształcenia plastyczne. Pojawienie się odkształceń plastycznych oznacza poszerzenie strefy, w której  $\sigma_{max} \cong R_e$  oraz zwiększenie naprężeń w sąsiednich punktach przekroju z otworem. Oznacza to zmniejszenie gradientu naprężeń mimo wzrastającego obciążenia, oczywiście tylko w pewnych granicach. Przy obciążeniach statycznych nie stwarza to zagrożenia. Po odciążeniu takiego elementu w strefie otworu pojawią się naprężenia o przeciwnym znaku, które będą obniżać wartości naprężeń przy otworze w następnym oraz kolejnych obciążeniach. Jest to zjawisko zbliżone do przepiężania plastycznego. Skutki przekroczenia wyraźnej granicy plastyczności w procesie rozciągania, po realizacji odciążania, przy ponownym obciążeniu tej samej próbki, pokazano w rozdziale 1 na rys. 1.4a. Wyraźnie widać powiększenie zakresu liniowej sprężystości materiału próbki przy ponownym obciążeniu. Zjawisko to bywa wykorzystywane do odprężania naprężeń spawalniczych. W przypadku zgodności zwrotów naprężeń spawalniczych (przed procesem wyżarzania) z naprężeniami roboczymi efekt ten może być i jest wykorzystywany do odprężania naprężeń spawalniczych. Szczegóły Czytelnik znajdzie w literaturze [9] oraz w materiałach Instytutu Spawalnictwa w Gliwicach. Operacja wymaga przeprowadzenia analizy parametrów. W warunkach obciążeń cyklicznie zmiennych w czasie i dodatkowo o zmiennych zwrotach takie naprężenia nie są obojętne dla trwałości konstrukcji. Spowodowało to konieczność opracowania metodyki uwzględniania wpływu spiętrzenia naprężeń na trwałość zmęczeniową konstrukcji. Metodyka analizy trwałości zmęczeniowej elementów z karami polega na wyznaczaniu stopnia koncentracji naprężeń np. stosunku wartości  $\sigma_{max}$  w karbie do wartości nominalnych naprężeń  $\sigma_{nom}$  w strefie równomiernego ich rozkładu –

rys.10.6. Na podstawie analiz teoretycznych oraz badań doświadczalnych wyznacza się wartość teoretyczną współczynnika koncentracji naprężeń oznaczanego najczęściej jako  $\alpha_k$  lub  $k_t$ , który jest wartością ilorazu naprężenia maksymalnego w karbie do naprężenia nominalnego w elemencie. Analiza zniszczeń zmęczeniowych w strefie karbów wskazuje, że zagrożenie trwałości zmęczeniowej konstrukcji jest w takich przypadkach prawie zawsze mniejsze od wartości tych teoretycznych współczynników koncentracji naprężeń. Analiza przypadków zniszczenia elementów z karbami wskazuje na potrzebę wprowadzenia korekty zmniejszającej zagrożenie w stosunku do teoretycznego współczynnika spiętrzenia naprężeń. Interpretacje tego zjawiska są dość różnorodne i często mało przekonujące. W rezultacie od dawna wprowadza się umowne współczynniki osłabiające wpływ teoretycznego spiętrzenia naprężeń na trwałość zmęczeniową elementów z karbem. Najczęściej wprowadzany jest tzw. współczynnik wrażliwości materiału na działanie karbu, dość powszechnie oznaczany jako  $\eta$  lub  $\eta_k$ .

Jest on wykorzystywany w realnych obliczeniach trwałości zmęczeniowej do obliczenia tzw. współczynnika wpływu karbu (spiętrzenia naprężeń)  $\beta_k$  według zależności:

$$\beta_k = 1 + \eta(\alpha_k - 1) \text{ lub } \beta_k = 1 + \eta_k(k_t - 1) \quad (10.9)$$

Wartość współczynnika  $\eta$  lub ( $\eta_k$ ), nazywanego „współczynnikiem wrażliwości materiału na działanie karbu”, dobierana jest w zależności od parametrów wytrzymałościowych materiału analizowanego elementu. Można również spotkać w literaturze [7, 14] pewne metody obliczeń wartości współczynnika  $\eta$  uwzględniające wartości promienia karbu.

W związku z wątpliwościami odnośnie do trafności doboru wartości  $\eta$ , w drugiej połowie XX w. pojawiły się nowe koncepcje usprawnienia tej operacji i lepszego jej powiązania z kształtem karbu. Sformułowano mianowicie koncepcję obliczania współczynnika  $\beta_k$  z wykorzystaniem tzw. „względnego gradientu naprężeń” zdefiniowanego jako:

$$\bar{G} = \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_{\sigma=\sigma_{\max}} \cdot \frac{1}{\sigma_{\max}} \quad (10.10)$$

współrzędna  $x$  mierzona prostopadłe do brzegu karbu.

Sposób wykorzystania względnego gradientu naprężeń jest w ogólnym przypadku dość skomplikowany i wymaga stosowania odpowiednich tablic [7]. Najłatwiej pokazać ideę na przykładzie czystego i prostego zginania pręta o przekroju prostokątnym o szerokości  $b$  oraz wysokości  $h$ , oś  $z$  prostopadła do osi pręta:

$$\bar{G} = \left. \frac{d\sigma}{dz} \right|_{\sigma=\sigma_{\max}} \cdot \frac{1}{\sigma_{\max}} = \left. \frac{M_g}{J_y} \cdot \frac{W_g}{M_g} \right|_{\sigma=\sigma_{\max}} = \frac{W_g}{J_y} = \frac{2}{h} [\text{mm}^{-1}] \quad (10.11)$$



W ogólnym przypadku stosowanie omówionej wyżej metody jest dość skomplikowane i także budzi wątpliwości; bliższe szczegóły stosowania wraz z tablicami można znaleźć w podręcznikach do *podstaw konstrukcji maszyn*, np. [7].

Można mieć nadzieję, że prowadzone w ostatnich latach badania nad inicjacją odkształceń plastycznych w stalach z niestatecznością materiałową (w Instytucie Mechaniki Stosowanej PK) [3, 5, 6, 12], które wykazały związek między gradientem naprężeń i wartością naprężenia inicjującego odkształcenia plastyczne, powinny przybliżyć uściślenie problemu wrażliwości trwałości zmęczeniowej na wpływ koncentracji naprężeń w karbie. Wyniki wspomnianych badań są zbieżne z wcześniejszymi wnioskami z badań trwałości zmęczeniowej elementów z korbami. Wspomniane badania wykazały bowiem, że inicjacja odkształceń plastycznych zależy od gradientu naprężeń, czyli od koncentracji naprężeń. W aktualnym stanie uznawanej wiedzy o materiałach zdolnych do odkształceń plastycznych wspomniane powyżej wyniki nie znalazły jeszcze pełnej akceptacji. Prowadzenie efektywnych obliczeń trwałości zmęczeniowej elementów z korbami wymaga korzystania z obszernych tablic z wartościami współczynników spiętrzenia naprężeń oraz współczynników wrażliwości materiałów na działanie karbu. Wykracza to zdecydowanie poza zakres tej książki. Odpowiednie wzory, tablice oraz wykresy współczynników znajdzie Czytelnik w podręcznikach do *podstaw konstrukcji maszyn*, np. [7].

Na uwagę zasługuje praca obejmująca analizę procesu rozwoju pęknięcia zmęczeniowego wraz z próbą oceny perspektyw trwałości elementu. Poziom trudności tego typu analiz nie predestynuje tych monografii jako klasycznych podręczników akademickich. Niemniej warto tutaj wymienić monografię D. Borońskiego [1]. Omawiane w tej pracy zagadnienia mogą być przydatne w ocenie przydatności np. konstrukcji z uszkodzeniami.

## A2. Wpływ naprężeń własnych

Naprężenia „własne”, nazywane również „zastanymi”, stanowią najczęściej pozostałość po procesach technologicznych takich jak odlewanie, spawanie, a nawet walcowanie. Mogą także być skutkiem nieprawidłowo wykonanego montażu konstrukcji złożonej. Naprężenia te mogą mieć istotny wpływ na trwałość zmęczeniową konstrukcji. Eliminacja naprężeń własnych związana jest często ze znacznymi nakładami finansowymi.

Eliminacja naprężeń odlewniczych w odlewach staliwnych odbywa się często w ramach procesu lub procesów wyżarzania odlewów, które są konieczne ze względu na uzyskanie poprawnej struktury oraz wymaganych właściwości mechanicznych. Zatem często eliminacja naprężeń odlewniczych nie wymaga dodatkowych zabiegów technologicznych i związanych z nimi kosztów. Coraz rzadziej spotykane odlewy żeliwne, także w ramach procesu technologicznego, podlegają wyżarzaniu, co często może powodować eliminację naprężeń odlewniczych.

Inną kategorię naprężeń własnych stanowią naprężenia spawalnicze, które osiągają duże wartości, często bliskie granicy plastyczności. Eliminacja naprężeń

spawalniczych jest często kłopotliwa z powodu dużych wymiarów wielu konstrukcji spawanych. Analizy naukowe wpływu naprężeń spawalniczych na trwałość zmęczeniową konstrukcji wykazały, że odprężanie przez wyżarzanie nie zawsze jest konieczne, co wykazano w pracy [9]. Zdaniem autorów przedstawiona w pracy [9] analiza współdziałania (superpozycji) naprężeń spawalniczych (własnych) z naprężeniami od obciążeń eksploatacyjnych jest przekonująca i pozwala ocenić, czy odprężanie naprężeń spawalniczych jest konieczne ze względu na trwałość zmęczeniową konstrukcji. Do oceny celowości eliminacji naprężeń spawalniczych konieczne jest określenie rozkładu tych naprężeń w celu ich porównania z naprężeniami roboczymi. Wyznaczanie naprężeń własnych omówiono w rozdziale poświęconym metodzie trepanacji otworowej. Od pewnego czasu stosowane jest postępowanie zmierzające do umożliwienia wyżarzania konstrukcji wielkogabarytowych. Konstrukcje takie projektuje się z „segmentów” o wymiarach umożliwiających wyżarzanie. Montaż realizowany jest przy wykorzystaniu śrub wstępnie napiętych o wysokiej wytrzymałości montowanych bez skręcania. Śruby naciągane są do wymaganego napięcia odpowiednim przyrządem, po czym wybierany jest luz pod nakrętką; cała operacja odbywa się bez skręcania, co nie pozostawia naprężeń stykowych w śrubach, przyczyniając się do ich większej pewności. Warto podkreślić, że pozostawienie naprężeń spawalniczych nie tylko zagraża obniżeniem trwałości zmęczeniowej, ale może prowadzić, w czasie eksploatacji, do deformacji ograniczających przydatność konstrukcji. Jest to skutek odprężania naprężeń spawalniczych w procesie eksploatacji konstrukcji. Przytoczone skutki działania naprężeń spawalniczych uzasadniają celowość przeprowadzania odprężania, tj. eliminacji naprężeń spawalniczych.

### A3. Wpływ wad materiałowych na trwałość zmęczeniową

Wady materiałowe są dość częstą przyczyną obniżenia trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych. Osłabianie trwałości zmęczeniowej przez wady materiałowe dotyczy częściej elementów odlewanych, chociaż znane są przypadki wad w odkuwkach, np. w postaci „zakutych” pęcherzy gazowych lub częściej nieciągłości innego typu i pochodzenia. Wady odlewnicze mogą polegać na „błędach struktury odlewu” bądź też na nieciągłościach w strukturze w postaci „pustek” lub odłamków rdzeni odlewniczych. Szczególnie wrażliwe na występowanie wad są odlewy stalowe ze względu na trudniejszy proces odlewania.

Wady struktury odlewu stanowią obszary o osłabionej odporności na odkształcenia plastyczne, które stanowiące mogą zarodek szczeliny prowadzącej do złomu zmęczeniowego. Wady w postaci wtrąceń niemetalicznych (np. odłamki rdzeni) lub szczelin o różnych wymiarach są wewnętrznymi korbami w elemencie konstrukcyjnym i tak zwykle działają na zmniejszenie trwałości zmęczeniowej. Ocena wpływu tych wad może być dokonywana podobnie do oceny wpływu korbów. W literaturze (np. [16]) można znaleźć tablice współczynników koncentracji naprężeń oraz wzory do obliczeń  $\alpha_k(k_f)$ . Dalszy tok obliczeń trwałości zmęczeniowej może być podobny

jak dla karbów. Ilościowa ocena wpływu błędów strukturalnych na trwałość zmęczeniową jest znacznie trudniejsza. W przypadku odlewów żeliwnych, przynajmniej dla żeliwa szarego, zakłada się brak wrażliwości na działanie karbu. Ogólnie można twierdzić, że wady materiałowe, podobnie jak karby, determinują w dużym stopniu miejsca predysponowane do inicjowania mikroszczelin i w konsekwencji złomów zmęczeniowych po niewystarczającym czasie eksploatacji, co pokazano na fotografiach „złomu” cylindra prasy na rys. 10.3.

#### **A4. Wpływ stanu powierzchni elementu konstrukcyjnego**

W analizach trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcyjnych uwzględnia się jeszcze wpływ stanu powierzchni. Wpływ stanu powierzchni ma znaczenie, jeżeli obróbka powierzchni elementu nie jest wystarczająco dokładna, przez co należy rozumieć, że jest gorszej jakości od powierzchni próbek podlegających badaniom znormalizowanym – które powinny podlegać dokładnemu szlifowaniu. Stan powierzchni elementu może mieć ujemny wpływ na trwałość zmęczeniową elementu, gdyż „rysy” na powierzchni spełniają rolę koncentratorów naprężeń. Dotyczy to przy tym strefy, gdzie zazwyczaj naprężenia są ekstremalne. Rysy na powierzchni jako koncentratory naprężeń zazwyczaj obniżają w pewnym stopniu trwałość zmęczeniową elementu. Uwzględnianie wpływu stanu powierzchni realizuje się przez wprowadzenie do obliczeń współczynnika stanu powierzchni odpowiadającego rodzajowi obróbki powierzchni elementu wg tablic zawartych w literaturze.

#### **A5. Wpływ wymiarów elementu konstrukcyjnego (wielkości elementu)**

Wielkość przedmiotu (elementu konstrukcyjnego) może mieć wpływ na trwałość zmęczeniową w sensie jej obniżenia. Wiadomo powszechnie, że własności mechaniczne wyrobów walcowanych, a także kutech, zależne są od ich wielkości i ze wzrostem wymiarów obniżają się. Podobne cechy dotyczą również elementów odlewanych, tj. im wymiary i masa odlewu są większe, tym właściwości mechaniczne zazwyczaj są mniejsze. Wartości współczynników uwzględniających wpływ wielkości przedmiotów dla elementów o standardowym wykonaniu można znaleźć w literaturze omawiającej obliczenia trwałości zmęczeniowej.

Od tej reguły zachodzą jednak wyjątki w stosunku do niezbyt licznej grupy zakładów, które prezentują wyjątkową jakość odlewów. Liczba tych producentów odlewów stalowych jest w Europie niewielka i do ich produktów trzeba stosować inne reguły obliczeń trwałości zmęczeniowej wyrobów, w porozumieniu z producentami.

Dla uwiarygodnienia powyższej opinii autorzy pozwalają sobie przytoczyć wyniki badań własności mechanicznych odlewów ze staliwa niskostopowego – maksymalny udział składnika stopowego nie przekraczał 1,31% (mangan), a pozostałe dodatki nie przekraczały 0,2%, z wyjątkiem krzemu – 0,35%. Wykonywane odlewy stalowe miały masy: dwa po około 150 [Mg], natomiast dwa większe po około 165 [Mg] po wstępnej obróbce.

Dla mniejszych odlewów własności kontraktowe, tj. minimalne, określono:

$R_e = 230$  [MPa];  $R_m = 450$  [MPa];  $A_5 = 14,0\%$ ;  $Z = 18\%$ ; KCU3 = 35 [J/cm<sup>2</sup>]; natomiast wartości efektywne według przedstawionego atestu:  $R_e = 348$  [MPa];  $R_m = 527$  [MPa];  $A_5 = 25\%$ ;  $Z = 54\%$ ; KCU3 = 74 [J/cm<sup>2</sup>].

Przeprowadzone na Politechnice Krakowskiej badania na próbkach wykonanych z czopów transportowych  $\Phi = 350$  [mm] dały wyniki jeszcze lepsze. Wyniki dla dwóch większych odlewów (masa po wstępnej obróbce ~165 [Mg]) były równie doskonałe:  $R_e = 330$  [MPa];  $R_m = 535$  [MPa];  $A_5 = 23,5\%$ ;  $Z = 54\%$ ; KCU3 = (74-80-68) [J/cm<sup>2</sup>].

Dodatkowo należy podkreślić, że odlewy w zasadzie nie miały wad. Wykonane zostały w roku 1987 w Zakładzie Hutniczym Koncernu „ŠKODA” w Czechosłowacji; Pilzno.

Z rozmów z Kierownictwem Odlewni „ŠKODY” uzyskano informację, że zalanie staliwem takich form zajmuje czas nieprzekraczający cztery minuty. Ówczesne możliwości krajowych stalowni w zakresie wykonania odlewów kończyły się na poziomie ~25 [Mg]; niestety często z wadami.

Innym przykładem z tamtego okresu, tym razem z polskiego przemysłu hutniczego oraz maszynowego, mogą być kolumny do prasy 200 [MN] wykonane w kraju przez zakłady „ZGODA” oraz „ZAMET”, a następnie poddane obróbce cieplnej w hucie w Ostrowcu Świętokrzyskim. Wymiary kolumn po obróbce mechanicznej  $\Phi = 650$  [mm] oraz długość ~15 000 [mm].

Badania własności mechanicznych po obróbce cieplnej wykazały, że spadek właściwości mechanicznych między warstwą przypowierzchniową a strefą rdzenia jest znacząco mniejszy od oczekiwań wynikających z literatury i niewiele przekraczał 35% w stosunku do powierzchni zewnętrznej. Powyższe jest przykładem możliwości krajowego przemysłu. Niestety huta w Ostrowcu Świętokrzyskim została sprzedana inwestorowi hiszpańskiemu.

## **B1. Specjalna obróbka mechaniczna strefy powierzchniowej**

Wymagania użytkowników, a zatem i producentów elementów maszyn o wyjątkowo dużej trwałości, doprowadziły do opracowania specjalnych metod obróbki powierzchni elementów maszyn istotnie podwyższających ich niezawodność i trwałość zmęczeniową. Metody mechanicznej obróbki powierzchni elementów, podwyższające ich trwałość zmęczeniową, polegają najczęściej na wprowadzeniu w warstwie powierzchniowej odkształceń plastycznych. Wspomniane odkształcenia plastyczne warstwy przypowierzchniowej polegają np. na kulkowaniu, młotkowaniu, dogniataniu (np. dna gwintu) lub kształtowaniu wykańczającym (np. gwintu) przez walcowanie. Dla przykładu bardzo odpowiedzialne śruby w ciągu wału głównego silnika okrętowego muszą mieć gwinty walcowane (wymagania firm ubezpieczających statki).

Zgniatanie plastyczne warstwy powierzchniowej sprawia, że rdzeń elementu (np. wałka lub śruby), który pozostaje sprężysty, wymusza w warstwie powierzchniowej naprężenia ściskające, które podwyższają trwałość zmęczeniową elementu

konstrukcyjnego. Skuteczność wymienionych zabiegów jest bardzo trudna do kontroli jakości na użytkowym elemencie. Wymaga to opracowania bardzo precyzyjnej technologii tej operacji na warstwie powierzchniowej elementu konstrukcyjnego i sposobów kontroli.

## **B2. Specjalna obróbka cieplno-chemiczna strefy powierzchniowej dla podwyższenia trwałości zmęczeniowej**

Cel, któremu ma służyć obróbka cieplno-chemiczna warstwy powierzchniowej, jest podobny jak omówionej powyżej obróbki plastycznej strefy powierzchniowej. Chodzi mianowicie o wywołanie w warstwie powierzchniowej naprężeń ujemnych (ściskających). Takie naprężenia podwyższają trwałość zmęczeniową elementu konstrukcyjnego. Najczęściej stosowanym zabiegiem do wywołania ściskania warstwy powierzchniowej jest hartowanie powierzchniowe. Powstające przy powierzchni ziarna martenzytu mają o kilka procent większą objętość, wewnętrzna strefa niezahartowana wywołuje zatem naprężenia ujemne w warstwie zahartowanej. Również ta metoda wymaga bardzo starannego dopracowania technologii (głównie w zakresie inżynierii powierzchni) wykonania tej operacji oraz metod kontroli skuteczności zabiegu.

## 10.5. WYZNACZANIE WYTRZYMAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ

### 10.5.1. OGÓLNE ZASADY BADAŃ

Badania prowadzące do wyznaczenia wytrzymałości zmęczeniowej charakteryzują się dużym rozrzutem wyników. Uzyskanie wiarygodnych wyników badań wymaga zatem przebadania (zniszczenia) dużej liczby próbek oraz statystycznego opracowania wyników. Wobec przyjętej obecnie granicznej liczby cykli na poziomie  $N_G = 10^7$ , a nawet  $5 \times 10^7$  cykli, wykonanie wiarygodnych badań wymaga dużo czasu oraz sporych nakładów finansowych. Należy bowiem pamiętać, że próbki do badań wytrzymałości zmęczeniowej muszą być precyzyjnie wykonane i obrobione.

Zasady przygotowania próbek i wykonania badań są dokładnie opisane w literaturze specjalistycznej, a także w normach. Najczęściej wykonywane są badania dla zginania, często dla czystego symetrycznego zginania, co wynika z możliwości realizacji obciążeń z dużą częstotliwością. Badania dla cykli rozciąganie–ściskanie są znacznie bardziej czasochłonne z powodu problemów z bezwładnością uchwytów ograniczającą częstotliwość obciążeń.

Ważnymi zasadami są wymagania dokładnego przeglądu próbek przed rozpoczęciem obciążeń, w szczególności pod kątem stanu powierzchni (dokładne szlifowanie lub polerowanie) z obowiązkiem rejestracji uwag wykonujących przegląd. Niedopuszczalne jest stosowanie w badaniach próbek z wadami np. stanu powierzchni lub obciążanie próbek już wcześniej obciążanych. Obowiązuje również zasada dokładnej weryfikacji cech charakterystycznych przełomów zniszczonych próbek.

Trwałą wytrzymałość zmęczeniową definiuje się następująco:

**Trwała wytrzymałość zmęczeniowa jest to taka wartość  $\sigma_{\max}$  w cyklu, dla której więcej niż 50% próbek nie uległo zniszczeniu po przekroczeniu bazowej liczby cykli  $N_G$ .**

Zasady opracowania wyników do sporządzania wykresu Wöhlera są opisane w normach oraz w specjalistycznej literaturze dotyczącej badań. Przy badaniu mierzącym do wyznaczenia krzywej Wöhlera należy przewidywać konieczność zniszczenia 50 i więcej próbek.

Wykorzystując osiągnięcia w rozwoju teorii prawdopodobieństwa, opracowano metody wyznaczania trwałej wytrzymałości zmęczeniowej, często określanej pojęciem granicy zmęczenia, wymagające zniszczenia tylko kilkunastu (zwykle powyżej 15) próbek, które są opisane w specjalistycznej literaturze oraz normach badawczych.

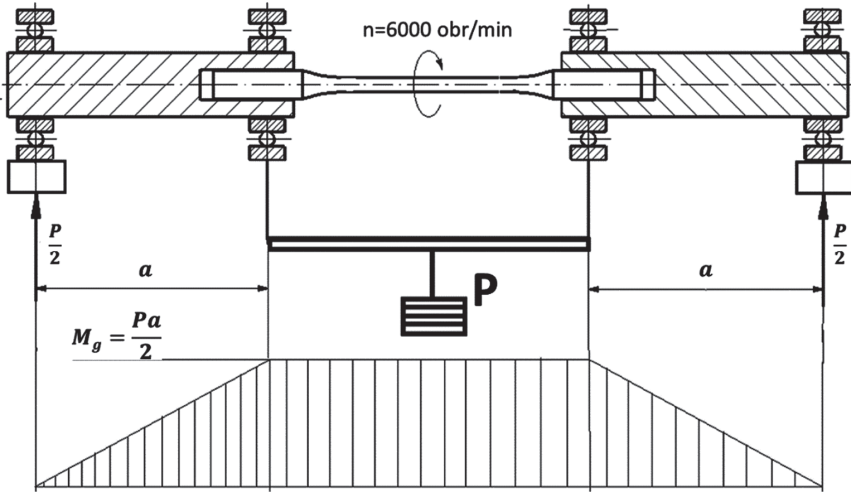
### 10.5.2. PRZYBLIŻONE METODY WYZNACZANIA TRWAŁEJ WYTRZYMAŁOŚCI ZMĘCZENIOWEJ

Spośród metod badawczych pozwalających na szybkie „oszacowanie trwałej wytrzymałości zmęczeniowej” na uwagę, ze względu na „popularność”, zasługuje tzw. **metoda Lehra**. Metoda ta daje wyniki przybliżone, raczej szacunkowe i tak jest stosowana w praktyce. Często do szybkiego oszacowania wytrzymałości zmęczeniowej przedstawianego do odbioru materiału – stali. Dokładniejsze wyniki uzyskuje się przy badaniu tą metodą stali miękkich np. z wyraźną granicą plastyczności (inaczej z „niestatecznością materiałową”).

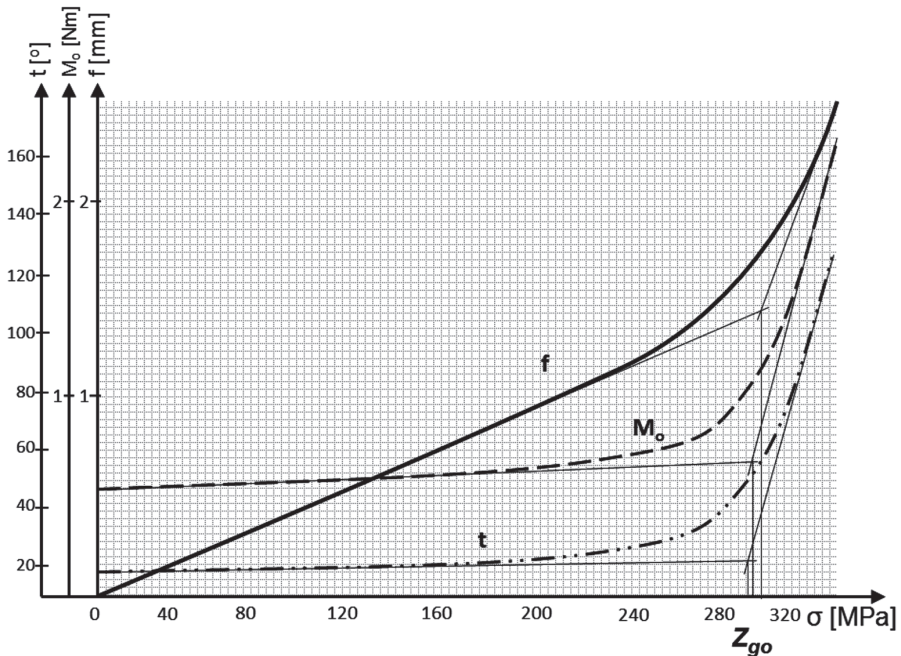
Koncepcja metody Lehra wykorzystuje wyniki badań nad inicjacją mikroszczelin w niejednorodnym metalu o ziarnistej i niejednorodnej strukturze. Jak scharakteryzowano inicjację procesu zniszczenia zmęczeniowego we Wprowadzeniu, do bieżącego rozdziału inicjacja mikroszczelin związana jest z mikroodkształceniami (poślizgami) plastycznymi, które powodują pochłanianie energii, mogą generować powstawanie trwałych ugięć próbki w próbie zginania. Wspomniane efekty mogą powodować niewielkie, ale mierzalne skutki, takie jak: nieliniowy od pewnego obciążenia przyrost temperatury próbki, nieliniowy, także od pewnego obciążenia, przyrost trwałego ugięcia oraz przyrost oporów ruchu obrotowego sygnalizowany wzrostem wartości momentu potrzebnego do napędu ruchu obrotowego badanej próbki. Próbę realizuje się dla przypadku obrotowego zginania próbki według schematu przedstawionego na rys. 10.7, stosowanego przy próbie symetrycznego zginania. Badanie wykonuje się na jednej próbce w cyklach obciążeń stopniowo wzrastających i trwających najczęściej około 180 do 300 sekund. Wykonywane są pomiary wartości momentu obrotowego w sposób ciągły w czasie obciążania próbki, natomiast po każdym cyklu maszyna badawcza jest zatrzymywana i wykonywane są pomiary temperatury i ugięcia próbki (w środku długości). Po wykonaniu pomiarów zwiększa się skokowo wartość obciążenia (momentu zginającego próbkę) i realizuje



się kolejny etap eksperymentu. Badanie kończy się najczęściej po zniszczeniu próbki, przy czym należy pamiętać o zabezpieczeniu przyrządów pomiarowych. Oszacowaną wartość trwałej wytrzymałości zmęczeniowej  $Z_{go}$  wyznacza się graficznie według zasady pokazanej na rys. 10.8.



Rys. 10.7. Schemat maszyny do próby obrotowo giętej



Rys. 10.8. Sposób wyznaczania trwałej wytrzymałości zmęczeniowej z wykresów Lehra



## LITERATURA

- [1] Boroński D., Metody badań odkształceń i naprężeń w zmęczeniu materiałów i konstrukcji, Wydawnictwo ITE-PIB, Radom 2007.
- [2] Brzoska Z., Wytrzymałość materiałów, PWN, Warszawa 1979.
- [3] Bućko S., Jodłowski H., Trzebicki M., Doświadczalno-numeryczna analiza pierwszej fazy odkształceń plastycznych w stalach z niestatecznością materiałową, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2015. (Do pracy załączono film obrazujący oryginalne przebiegi procesów inicjacji odkształceń plastycznych „Wizualizacja inicjacji odkształceń plastycznych w stalach z niestatecznością materiałową w warunkach rozciągania oraz czystego i prostego zginania” – S. Bućko, H. Jodłowski, P. Gibas).
- [4] Bućko S., Jodłowski H., Trzebicki M., An experimental-numerical analysis of plastic zones initiation around holes in shields made of steel 45 under tension. *Archive of Mechanical Engineering*, Vol. LXI, No 1, 2014.
- [5] Bućko S., Jodłowski H., Inicjacja odkształceń plastycznych w stali z wyraźną granicą plastyczności w warunkach gradientu naprężeń. *Acta Mechanica et Automatica*, Vol. 3, nr 1, 2009.
- [6] Bućko S., Jodłowski H., Inicjacja odkształceń plastycznych w stalach z niestatecznością materiałową w warunkach rozciągania i czystego zginania, *Czasopismo Techniczne* nr 4, 2010.
- [7] Dietrich M. (red.), Podstawy konstrukcji maszyn, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1995.
- [8] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., Wytrzymałość materiałów, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1997.
- [9] Gurney T.R., Zmęczenie konstrukcji spawanych, WNT, Warszawa 1973.
- [10] Jodłowski H., Bućko S., Gibas P., Visualization of Processes of Plastic Deformation Initiation in Conditions of Pure Tension and Pure and Simple Bending, *Experimental Mechanics of Solids*, 2015.
- [11] Jodłowski H., Trzebicki M., The Comparative Analysis of Experimental and Numerical Results of Initial Phase of Plastic Deformation in Shields with Openings Under Tension, *Experimental Mechanics of Solids*, 2015.
- [12] Jodłowski H., Metoda rozpoznawania odkształceń plastycznych w procesie obciążania stali wykazujących niestateczność materiałową. Praca doktorska, Politechnika Krakowska, Kraków 2007.
- [13] Katarzyński S., Kocańda S., Zakrzewski M., Badanie własności mechanicznych metali. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1967.
- [14] Niezgodziński M.E., Niezgodziński T., Obliczenia zmęczeniowe elementów maszyn, PWN, Warszawa 1973.
- [15] Papadopoulos I.V., Davoli P., Gorla C., Filippini M., Bernasconi A., A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals, *Int. Journal of Fatigue*, Vol. 19, 1997, 219–235.
- [16] Peterson R.E., Stress concentrations Factors, Wiley and Sons, New York 1974.

**Dr hab. inż. Stefan Bućko, emerytowany profesor Politechniki Krakowskiej** – wieloletni z-ca dyrektora Instytutu Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, a następnie Instytutu Mechaniki Stosowanej. Pełnił również funkcję kierownika Zespołu Badań Modelowych ZUT „ZGODA” w Świętochłowicach. Był wybitnym specjalistą i praktykiem w dziedzinie analizy wytrzymałościowej elementów konstrukcji maszyn i urządzeń technicznych, szczególnie w zakresie pras hydraulicznych o dużych naciskach oraz urządzeń wyciągowych stosowanych w przemyśle wydobywczym. Był rzeczoznawcą Zespołu SIMP w specjalnościach: wytrzymałość i badania materiałów oraz maszyny i urządzenia do przeróbki plastycznej metali. Prace konstrukcyjne oraz ekspertyzy badawcze jego autorstwa znalazły liczne zastosowania praktyczne. Był członkiem Sekcji Mechaniki Eksperymentalnej Komitetu Mechaniki PAN.

**Dr inż. Agnieszka Chojnacka-Brożek, adiunkt Politechniki Krakowskiej** – pracownik Katedry Mechaniki Doświadczalnej i Biomechaniki. Jej działalność naukowa dotyczy zagadnień symulacji i modelowania numerycznego w bioinżynierii oraz mechanice materiałów i konstrukcji. Jest specjalistką w zakresie aplikacji inżynierskich metod projektowania wspomaganego komputerowo, metod elementów skończonych oraz metod analizy i przetwarzania obrazów medycznych. Jest autorką/współautorką 10 prac naukowych i 2 monografii. Pełni funkcję opiekuna pracowni analiz numerycznych w biomechanice na Wydziale Mechanicznym Politechniki Krakowskiej.

**Dr hab. inż. Grzegorz Milewski, profesor Politechniki Krakowskiej** – pracownik Katedry Mechaniki Doświadczalnej i Biomechaniki. Jego działalność naukowa jest związana z następującymi dziedzinami: bioinżynieria stomatologiczna w zakresie doświadczalnych i numerycznych analiz wytrzymałościowych, metody doświadczalne mechaniki materiałów i konstrukcji, reologia oraz zmęczenie materiałów i kompozytów polimerowych, biomateriały. Jest autorem bądź współautorem ponad 100 prac naukowych, w tym 16 z listy JCR, oraz 8 książek i monografii naukowych. Jest jednym z nielicznych w Polsce specjalistów w zakresie biomechaniki stomatologicznej. Jest twórcą i wieloletnim opiekunem kierunku *inżynieria biomedyczna* na Wydziale Mechanicznym Politechniki Krakowskiej. Należy do wielu stowarzyszeń i sekcji, w tym m.in. do European Society of Biomechanics, Sekcji Mechaniki Eksperymentalnej oraz Sekcji Biomechaniki Komitetu Mechaniki PAN.